

UNTERSUCHUNG DES VERHALTENS VON NICHTSTATIONÄREN
ELEKTROMAGNETISCHEN UND THERMISCHEN FELDERN
MIT NUMERISCHEN VERFAHREN

D i s s e r t a t i o n (B)

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor scientiae technicarum (Dr.sc.techn.)

vorgelegt dem Wissenschaftlichen Rat der
Technischen Hochschule Ilmenau

von Dr.-Ing. Andrzej Brykalski
geb. am 6. April 1956 in Szczecin

Gutachter:

Prof.Dr.sc.techn. Renate Müller,
Technische Hochschule Ilmenau

Prof.Dr.sc.techn. Gerhard Helm,
Technische Universität Chemnitz

Prof.Dr.-Ing.habil. Wojciech Lipiński,
Technische Universität Szczecin

vorgelegt am: 26. September 1990

verteidigt am: 10. Juli 1991

Verfahrens-Nr.:

Brykalski, Andrzej:

Untersuchung des Verhaltens von nichtstationären elektromagnetischen und thermischen Feldern mit numerischen Verfahren,

1990, 141 Seiten, 58 Bilder, 12 Tabellen, 99 Lit.

Ilmenau: Technische Hochschule Ilmenau, Sektion Informationstechnik und Theoretische Elektrotechnik (INTET)

D i s s e r t a t i o n (B)

R E F E R A T

Die numerische Feldberechnung als Instrument zur Entwicklung und Optimierung elektrischer Anlagen und Geräte spielt bei den Aufgaben des rechnergestützten Entwurfs eine immer größere Rolle. Von Bedeutung ist dabei die Analyse dynamischer Prozesse, z.B. des nichtstationären elektromagnetischen und Wärmefeldes.

In der vorliegenden Arbeit werden sowohl einige konventionelle Methoden zur Untersuchung der dynamischen Eigenschaften von durch die lineare Diffusionsgleichung beschriebenen Vorgängen dargestellt als auch neue numerische Verfahren vorgeschlagen. Neben den bekannten Diskretisierungsmethoden (z.B. der Finite-Differenzen- bzw. Finite-Element-Methode) zur Behandlung von Randwertproblemen wird in dieser Arbeit u.a. die Methode der mittleren Zeitkonstante sowie die in den Identifikationsaufgaben verwandte modifizierte Momentenmethode ausgenutzt. Die Methoden gestatten, einige die Dynamik des Prozesses charakterisierende Kenngrößen wie: Verzögerung, Laufzeit und Ordnung der Verzögerung zu ermitteln. Die bearbeiteten Algorithmen werden mit Hilfe von Blockdiagrammen veranschaulicht und an einer Reihe von Beispielen getestet. Durch den Vergleich der gewonnenen numerischen Lösung mit aus der Literatur bekannten Ergebnissen wird das Konvergenzverhalten untersucht und die Rechengenauigkeit abgeschätzt. Außerdem werden einige praktische Aufgaben der technischen Elektrodynamik (u.a. in offenen Feldgebieten) gelöst und eine umfassende numerische Analyse elektromagnetischer Prozesse sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich durchgeführt.

INHALTSVERZEICHNIS

Referat	2
Verzeichnis der verwendeten Symbole	6
1. Einleitung	8
1.1. Allgemeines	8
1.2. Internationaler Stand der theoretischen Forschungen auf dem Gebiet der Untersuchung dynamischer Prozesse	11
1.3. Gegenstand der Arbeit; Formulierung der Aufgaben- stellung	17
2. Differentialgleichungen nichtstationärer Felder in der Elektrotechnik	19
2.1. Allgemeines	19
2.2. Das elektromagnetische Feld	20
2.3. Nichtstationäre Wärmeleitung	23
3. Zur Charakterisierung dynamischer Prozesse	25
3.1. Systeme mit konzentrierten und verteilten Parametern	25
3.2. Kennfunktionen linearer Systeme	25
3.2.1. Impulsantwort	26
3.2.2. Sprungantwort und Übertragungsfunktion	26
3.3. Beschreibung des dynamischen Verhaltens im Frequenz- bereich	27
3.4. Mittlere Zeitkonstante	28
4. Numerische Behandlung von Diffusionsprozessen	32
4.1. Mathematische Problemformulierung	32
4.2. Behandlung des Randwertproblems zur Bestimmung der Raumlösung	33
4.2.1. Galerkinsches Verfahren	33
4.2.2. Methode der finiten Elemente	35
4.2.3. Differenzenverfahren	38
4.2.4. Lösungsweg bei offenen Feldgebieten	40
4.3. Behandlung des Anfangswertproblems zur Bestimmung der Zeitlösung	43
5. Numerische Bestimmung der mittleren Zeitkonstante ..	46
5.1. Allgemeines	46
5.2. Anwendung des Galerkinschen Verfahrens	48
5.2.1. Allgemeines Lösungskonzept	48

5.2.2. Berechnungsbeispiele	51
5.3. Anwendung der Methode der finiten Elemente	56
5.3.1. Allgemeines Lösungskonzept	56
5.3.2. Berechnungsbeispiele	60
5.4. Anwendung des Differenzenverfahrens	63
5.4.1. Allgemeines Lösungskonzept	63
5.4.2. Berechnungsbeispiele	65
6. Bestimmung von Parametern vereinfachter Übertra- gungsfunktionen von Anordnungen mit verteilten Para- metern	72
6.1. Allgemeines	72
6.2. Parameterbestimmung mit Hilfe der modifizierten Mo- mentenmethode	73
6.3. Anwendung von Methoden der numerischen Feldanalyse	76
6.3.1. Verwendung der Laplace-Transformation	76
6.3.2. Verwendung der Frequenzbereichsanalyse	82
6.4. Berechnungsbeispiel	85
7. Praktische Anwendungen	94
7.1. Allgemeines	94
7.2. Analyse der Ausgleichsvorgänge in elektromagneti- schen Abschirmungen	95
7.2.1. Das elektromagnetische Feld in der Kastenabschirmung	95
7.2.2. Das elektromagnetische Feld in einer axialsymmetri- schen Abschirmung	99
7.2.3. Das elektromagnetische Feld bei einer halbgeschlos- senen Abschirmung	102
7.2.4. Abschirmung von Zylinderspulen durch eine leitende Platte	107
7.2.5. Mittlere Zeitkonstante und Schirmfaktor	112
7.3 Zeitkonstante des magnetischen Flußes in einem Gleichstrommagnet bei feststehendem Anker	114
7.4. Das dynamische Verhalten eines aktiven elektrischen "Witterungsfühlers"	118
7.4.1. Allgemeines	118
7.4.2. Prinzipieller Aufbau des "Witterungsfühlers"	121
7.4.3. Numerische Experimente	122

8.	Zusammenfassende Wertung und Vorschläge zur Fortführung der Arbeit	129
	Literaturverzeichnis	133
	Anhang A: Differentiation von Matrizen	140
	Anhang B: Übergangsfunktionen	141

VERZEICHNIS DER VERWENDETEN SYMBOLE

a, b, d, h, R	- Abmessungen
A	- magnetisches Vektorpotential
B	- magnetische Induktion
c_p	- spezifische Wärme
D	- Diffusionskoeffizient
E	- elektrische Feldstärke
f	- Frequenz
F	- Frequenzgang
G_k	- Hilfsparameter (Moment)
h, h_x, h_y	- Maschenweite
$h(t)$	- Übergangsfunktion
H	- magnetische Feldstärke
i, I	- Strom
J	- Stromdichte
$K(s)$	- Übertragungsfunktion
L	- elliptischer Operator
\mathcal{L}	- Operator der Laplace-Transformation
N_i, N_j, N_k, \dots	- Formfunktionen
P	- Leistung, Realteil des Frequenzganges, Raumpunkt
q	- Wärmestromdichte
q_v	- Leistungsdichte
Q	- Imaginärteil des Frequenzganges
s	- Variable der Laplace-Transformation
S	- Schirmfaktor, Fläche
t	- Zeit
T	- elektrisches Vektorpotential, Temperatur
T_a	- Außentemperatur
u_i	- gesuchte Funktion U im i -ten Netz- bzw. Elementknoten
$U(P, t)$	- zeit- und ortsabhängige Funktion
U_a	- Näherung der Funktion U
U_o, U_∞	- Anfangs- und Endzustand von U
$v_i, v_i^{(k)}$	- Elemente von Hilfsvektoren
v_e, v_m	- elektrisches und magnetisches Skalarpotential

w_1, w_2, w_4	- Funktionen, die physikalische Eigenschaften des Materials bestimmen
w_3, w_5	- Erregerfunktionen
$1(t)$	- Einheitssprung

Griechische Symbole

α	- Wärmeübertragungskoeffizient
γ	- elektrische Leitfähigkeit
δ_{ij}	- Kronecker-Symbol
Δ	- Laplace-Operator, Zuwachs, Absolutfehler
ϵ	- Dielektrizitätskonstante
λ	- Wärmeleitfähigkeit
μ	- magnetische Permeabilität
ρ	- Dichte, Variable des Polarkoordinatensystems
τ, τ_i	- Zeitkonstanten
τ'	- normierte (relative) Zeitkonstante
$\phi_i(P)$	- Koordinatenfunktionen
Φ	- magnetischer Fluß
$\psi_i(t)$	- zeitabhängige Funktionen
ω	- Kreisfrequenz

Die Vektorgößen werden durch Fettdruck gekennzeichnet, z.B. **B**. Das Sternchen * symbolisiert das Ergebnis der Laplace-Transformation, z.B. $\psi_i^*(s) = \mathcal{L}[\psi_i(t)]$. Die Spaltenvektoren werden in geschweiften, z.B. $\{B\} = \{b_i\}$ und die zweidimensionalen Matrizen in eckigen Klammern, z.B. $[A] = [a_{ij}]$ angegeben. Bei allen physikalischen Größen werden SI-Einheiten angewandt.

1. EINLEITUNG

1.1. Allgemeines

Mit der schnellen Entwicklung der Digitaltechnik, deutlicher Produktionssteigerung von Groß- und besonders Kleinrechnern, sowie mit der Bearbeitung moderner Software, werden qualitativ neue Entwurfs-, Prognose- und Forschungsinstrumente zur Verfügung gestellt. Die damit verbundenen Stichworte wie *Computer Aided Design* (CAD) oder *Computer Aided Manufacturing* (CAM), die in den letzten Jahren eine Weltkarriere gemacht haben, werden in den entwickelten Länder praktisch realisiert und sind in fast allen Gebieten der Technik verbindlich geworden. Auf dem Computermarkt werden spezialisierte CAD- bzw. CAD/CAM-Systeme angeboten, die u.a. mit einer leistungsfähigen Zentraleinheit, einem Mathematik-Coprozessor, modernen graphischen Ein- und Ausgabegeräten (z.B. hochauflösende Bildschirme mit Tastatur und *Maus*, Hochgeschwindigkeitsplottern, Digitalisiertische), vielseitiger Anwendungssoftware und umfangreicher, universeller Datenbank ausgestattet sind. Diese Systeme zeichnen sich durch einfache menügesteuerte Bedienung aus und werden oft zur *Multitasking*-Technik vorgesehen.

Die Anwendungssoftware ist meist auf die Lösung bestimmter technischer Probleme gerichtet. Zum Beispiel müssen bei der Entwicklung und Optimierung von elektromagnetischen Energiewandlern einige Betriebseigenschaften, wie Wirbelströme, Stromwärmeverluste und Kräfte berücksichtigt werden. Eine immer größere Rolle spielt dabei die rechnergestützte Berechnung elektromagnetischer und Wärmefelder, die im Fall komplizierter Material- und Quellenverteilung als besonders nützliches Hilfsmittel in den CAD-Aufgaben verwandt wird. Die Optimierung elektrischer Geräte auf rein experimentellem Wege ist zeitaufwendig und kostenspielig, wenn es darum geht, eine für den jeweils vorgegebenen Zweck optimale Konstruktion zu entwickeln. Ein CAD-Programm kann die Forschungsarbeiten grundlegend ändern.

Die mit numerischer Feldberechnung verbundenen Forschungsarbeiten erstrecken sich u.a. auf folgende Gebiete:

- Erarbeitung geeigneter effektiver Verfahren zur Lösung der Feldgleichungen;
- Entwicklung von Computerprogrammen zur Lösung großer Gleichungssysteme.

Die bekannten Diskretisierungsmethoden (Finite-Differenzen- bzw. Finite-Element-Methode) wurden zunächst nur für räumlich begrenzte und z.Zt. in Verbindung mit anderen Methoden (z.B. Boundary-Integral- bzw. Infinite-Element-Methode) auch für offene Probleme angewandt. Diese Methoden wandeln die Differentialgleichung direkt in ein algebraisches Gleichungssystem um, dessen Ordnung je nach Art und Größe des betrachteten Problems zwischen 10^3 für mittlere zweidimensionale und 10^6 für größere dreidimensionale Aufgaben liegt. Zur Lösung dieser Gleichungssysteme sind die direkten Methoden (z.B. die Gaussche Elimination oder Cholesky-Verfahren) und die iterativen Verfahren (z.B. die Überrelaxationsmethode) entwickelt worden.

Der breite Begriff *Feldberechnung* umfaßt verschiedene Feldprobleme, die jedoch in Bezug auf die Art der zu lösenden Differentialgleichungen in einige Problemenklassen gegliedert werden müssen. Zur ersten Klasse von typischen Problemen gehören die stationären Probleme der Elektrostatik und des magnetischen Feldes in stromfreien Gebieten, die Bestimmung der stationären Temperaturverteilung bei Wärmeleitungsproblemen und die Berechnung der stationären elektrischen Strömungs- und magnetischen Felder. Das gesuchte Feld wird in diesem Fall durch die Poissonsche (oder Laplacesche) Differentialgleichung beschrieben. Das stationäre elektromagnetische Wechselfeld kann man zur zweiten Klasse zählen. Dabei muß die komplexe Helmholtz-Differentialgleichung gelöst werden. Die dritte Klasse der zeitabhängigen nichtstationären Felder wird mit Hilfe der partiellen Differentialgleichungen parabolischer oder hyperbolischer Art beschrieben. Diese Klasse umfaßt Diffusions- und Wellenprobleme.

Der numerischen Berechnung stationärer Felder wurden zahlreiche wissenschaftliche Arbeiten gewidmet, deshalb ist diese Frage verhältnismäßig gut, sowohl theoretisch als auch vom Standpunkt der Berechnungspraxis, bearbeitet. Viele aktuelle, praktische

Aufgaben der Elektrotechnik verbinden sich dagegen mit der Untersuchung dynamischer Prozesse. Als Beispiele können folgende Probleme der Technik genannt werden: Bestimmung elektromagnetischer Prozesse in elektrischen Maschinen, im besonderen der nichtstationären Stromverdrängung und des Zeitverhaltens von Strömen in Nuten; Untersuchung des Abschirmverhaltens; Erwärmungsprozesse bei induktiver oder Widerstandserwärmung; dynamisches Verhalten von Wirbelströmen bei der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung; Untersuchung der dynamischen Eigenschaften von Einstell- und Meßelementen der Automatik u.v.a.. Aus diesem Grund wurden in den letzten Jahren einige Algorithmen entwickelt, die die numerische Behandlung nichtstationärer Feldprobleme und insbesondere von Diffusionsprozessen gestatten. Da das nichtstationäre (rasch veränderliche) Feld durch orts- und zeitabhängige Feldgrößen beschrieben werden muß, muß man die Algorithmen zu ihrer Berechnung unter räumlichen und zeitlichen Aspekten betrachten. Im ersten Fall handelt sich um eine auch für die stationären Aufgaben übliche Diskretisierung des Grundgebietes und Berücksichtigung der zugehörigen Randbedingungen, was z.B. mit Hilfe des FE-Verfahrens realisiert werden kann. Im zweiten Fall muß schrittweise eine Anfangswertaufgabe gelöst werden, wobei aus Stabilitätsgründen am häufigsten die sogenannte θ -Methode, z.B. das Crank-Nicolson-Differenzenschema angewandt wird.

Ein besonderes Problem ist die Berücksichtigung der nichtlinearen Eigenschaften des Materials, z.B. der tatsächlichen Magnetisierungskennlinie in permeablen Stoffen. Für diese Feldaufgaben sind einige Quasilinearisierungsmethoden entwickelt worden, wobei in der Literatur als die meist verwandte Methode das Newton-Raphson-Verfahren angegeben wird.

Mit Hilfe der o.g. Verfahren können die dynamischen Prozesse schrittweise im Zeitbereich untersucht werden. Von großer Bedeutung ist ebenfalls die Kenntnis des dynamischen Verhaltens im Frequenzbereich. In diesem Fall wird das betrachtete Feld unter der Annahme einer zeitharmonischen Erregung mit variabler Frequenz ausgewertet. Ein anderer Untersuchungsweg besteht darin, die dynamischen Eigenschaften durch die Angabe einiger Kenn-

größen, z.B. der Zeitkonstanten zu charakterisieren. Bei der Bestimmung dieser Kenngrößen wird zwar die Gestalt der betrachteten Diffusionsgleichung, sowie der Anfangs-Randbedingungen berücksichtigt, aber praktisch werden nur einige Randwertprobleme gelöst. Bei der numerischen Feldanalyse wurde diesem letztgenannten Weg bisher wenig Beachtung geschenkt. In der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag dazu gebracht werden.

Zur Ergänzung soll hinzugefügt werden, daß obwohl die numerische Analyse eine der grundsätzlichen theoretischen Methoden zur Untersuchung nichtstationärer Felder bildet, z.Zt. auch andere Forschungsmethoden angewandt werden. Beim Entwurf werden z.B. die mit Hilfe von RL- oder RC-Schaltkreisen gebauten Analog- bzw. Hybridfeldanalysatoren verwandt.

Im nächsten Abschnitt werden auf Grund der aktuellen Literatur einige Entwicklungstendenzen auf dem Gebiet der numerischen Analyse nichtstationärer Prozesse dargestellt.

1.2. Internationaler Stand der theoretischen Forschungen auf dem Gebiet der Untersuchung dynamischer Prozesse

Die meisten wissenschaftlichen Arbeiten, die sich mit rechnergestützter Feldanalyse befassen wurden den stationären Problemen gewidmet. In letzter Zeit werden für die parabolischen Differentialgleichungen numerische Methoden bearbeitet, die von Technikern mit großem Interesse aufgenommen wurden und mit der Entwicklung leistungsfähiger Rechentechnik sofort weite Verbreitung fanden. Von diesem Interesse zeugen die Zeitschriftenbeiträge, die in den letzten Jahren immer häufiger veröffentlicht wurden. Wegen des begrenzten Umfanges der vorliegenden Arbeit, können in diesem Abschnitt nur einige der Beiträge dargestellt werden, die jedoch die Vielfältigkeit der in der Berechnungspraxis verwandten Verfahren beweisen.

Diese Beiträge kann man in drei Gruppen einteilen. Die erste Gruppe bilden Arbeiten, die einen theoretischen Charakter haben. Zu dieser Gruppe gehören die Arbeiten von *Krajewski* [49], *Loretan* [61], *Łach* [62] und *Savkar* [83], in der nichtstationäre Randwertprobleme mit Hilfe von Variationsverfahren behandelt

wurden. Kogan [47] schlug das Kantorowitsch-Verfahren zur Lösung nichtlinearer Wärmeleitungsaufgaben vor. Obwohl die Bezeichnung "Kantorowitsch-Verfahren" suggerieren kann, daß sich dieses Verfahren auf den Variationsprinzipien gründet, erweist sich die in [47] dargestellte Methode als eine Variante der Momentenmethode. Die Lösung der Anfangswertaufgabe mit Hilfe der am meisten verwandten θ -Methode wurde u.a. von Axellson [3], Douglas und Dupont [30], sowie Liniger [55] untersucht. Betrachtet wurden die Konvergenz und Fehlerabschätzung der Methode für die angenommenen Parameterwerte von θ . Von Liniger [55] und Zlamal [99] wurde die Strategie der optimalen Wahl von θ diskutiert. Diesem Thema wurde auch die Arbeit [51] von Krawczyk gewidmet. Shao u.a. [87] haben zur Analyse des elektromagnetischen Feldes im Übergangszustand die Boundary-Element-Methode (BEM) angewandt. Zur Diskretisierung im Zeitbereich wurden zwei Arten von Diskretisierungselemente (konstantes und lineares Element) im Intervall $\langle t_{m-1}, t_m \rangle$ eingeführt. Für beide Diskretisierungselemente wurden entsprechende Gleichungssysteme abgeleitet und die Matrixkoeffizienten angegeben. Die Methode kann man für lineare, zweidimensionale (2D) Anfangs-Randwertaufgaben anwenden. Die Lösung wird schrittweise gewonnen, wobei eine relativ große zeitliche Schrittweite angenommen werden kann. Das Verfahren wurde anhand von zwei einfachen Berechnungsbeispielen illustriert. Honma und Tanaka [42] haben eine modifizierte Regular Boundary Element Method (R-BEM) vorgeschlagen. Die Methode weist bedingungslose Stabilität und Konvergenz zweiter Ordnung auf. Davey hat in [28] die nichtstationäre Wirbelstromaufgabe durch Lösung eines Eigenwertproblems betrachtet und in [29] die Methode der Schichtimpedanz zur Berechnung nichtstationärer Prozesse in Anordnungen mit einer Schichtstruktur dargestellt. Als Beispiele wurden eine leitende Hohlkugel und der FELIX-Zylinder untersucht. Hara u.a. [40] haben neue Time Periodic Finite Element Method (TPFEM-Methode) präsentiert, welche die numerische Analyse von periodisch zeitabhängigen, nichtlinearen Diffusionsprozessen gestattet. Im Vergleich zu konventionellen Zeitdiskretisierungsmethoden, z.B. der θ -Methode kann man relativ große Schrittweiten im Zeitbereich annehmen, ohne die geforderte Rechengenauigkeit zu verlie-

ren. Die TPFEM-Methode nutzt die "Randbedingungen" in bestimmten Schritten aus. Das nichtlineare Problem wurde mit Hilfe des Newton-Raphson-Quasilinearisierungsverfahrens gelöst. Dank der Annahme großer Schrittweiten ist die Rechenzeit relativ gering. An einem Beispiel wurden die TPFEM- und die konventionellen *step by step* Methoden in Bezug auf die CPU-Zeit verglichen. Bei gleicher Genauigkeit forderte die TPFEM eine 6 bis 30 mal kürzere Rechenzeit. Die Verkürzung der CPU-Zeit wurde auch von *Zhi-ming u.a.* [97] betrachtet. Die konventionelle θ -Galerkin- und Newton-Raphson-Methode wurde in Bezug auf die Beschleunigung des Iterativprozesses modifiziert. Besprochen wurde die Optimierung des eingeführten "Konvergenzbeschleunigungskoeffizienten" α . Die theoretischen Betrachtungen betrafen axialsymmetrische Wirbelstromaufgaben. *Tsuboi u.a.* [94] haben die numerische Wirksamkeit der BEM und FEM an zweidimensionalen, nichtstationären Wirbelstromproblemen analysiert. Die Betrachtungen wurden am Beispiel einer rechteckförmigen Maschinennut erläutert. Ergebnisse der numerischen Auswertungen haben *Tsuboi u.a.* mit einer exakten Lösung (siehe z.B. *Rolicz* [80]) verglichen. Um die gleiche Rechengenauigkeit erreichen zu können, wurde bei der Anwendung der BE-Methode die Schrittweite von $\Delta t = 1/1800$ [s] erforderlich. Die FE-Methode erforderte die viel kleinere Schrittweite von $\Delta t = 1/6000$ [s].

Die zweite Gruppe von Publikationen bilden Beiträge, in denen bekannte Verfahren zur Behandlung nichtstationärer Prozesse entweder praktisch angewendet oder weiterentwickelt wurden. *Rolicz* [80] analysierte nichtstationäre, elektromagnetische Prozesse in elektrischen Maschinen, u.a. die nichtstationäre Stromverdrängung in der Maschinennut verschiedenen Querschnitts. Die Arbeiten von *Krasoň* [50] und *Wiak* [96] wurden der numerischen Berechnung von zweidimensionalen, elektromagnetischen Feldern im Eisen unter Berücksichtigung der realen Magnetisierungskennlinie gewidmet. In beiden Arbeiten wurde die Diffusionsgleichung sowohl im Raum- als auch im Zeitbereich mit Hilfe des Differenzenverfahrens gelöst. Die Zeitdiskretisierung hat *Krasoň* [50] mit Hilfe des Crank-Nicolson-Verfahrens durchgeführt. *Wiak* [96] hat dagegen das Rechenschema von Saulev im ersten Schritt ($t = \Delta t$) und

das Du Fort-Frankel-Schema für die nächsten Schritte ($t > \Delta t$) angewandt. Kohlgrüber und Woelk [48] befaßten sich mit der nichtstationären Temperaturberechnung in Körpern mit kleinen Abmessungen. Diskutiert wurden u.a. die Instabilitätsprobleme, die bei kleinen Abmessungen auftreten können. Als Berechnungsbeispiel wurde die Meßanordnung zur Messung der Wärmeleitfähigkeit von Grundproben mittels der Methode "des heißen Drahtes" betrachtet. Bei der Auswertung wurde das implizite Rechenschema von Euler angewandt. Von Müller [70,71] wurde das Übertragungsverhalten verteilter, exponentieller RC-Schichtstrukturen untersucht. Zur iterativen Lösung des 2D-, nichtstationären Feldproblems im inhomogen berandeten Gebiet wurde das Verfahren der alternierenden Richtungen (ADI-Verfahren) angewandt. Es wurden u.a. das Konvergenzverhalten, sowie der Einfluß der angenommenen Schrittweite auf die Genauigkeit der numerischen Rechnung diskutiert. Einige anwendungsorientierte Beiträge betreffen die Probleme des nichtstationären, elektromagnetischen Feldes in elektrischen Maschinen. Hannala und MacDonald [39] analysierten eine Synchronmaschine mit einem großen und massiven Rotor. Bouillaut und Razeek [4] haben Wirbelströme und Wirbelstromverluste im Rotor der Synchronmaschine unter Berücksichtigung des Statorzahnes untersucht. Die Anfangs-Randwertaufgabe wurde zweidimensional mit Hilfe des FE- und θ -Verfahrens behandelt. Untersucht wurden u.a. die Erscheinungen, die im Sättigungszustand auftreten, wobei die nichtlineare Aufgabe mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens gelöst wurde. Shao und Zhou [86] analysierten das Zeitverhalten des Stromes in den Maschinennuten verschiedenen Querschnitts. Untersucht wurde u.a. die Nut eines Doppelkäfigmotors, wobei die Anfangs-Randwertaufgabe linear und zweidimensional mit Hilfe der BE-Methode (siehe auch [87]) behandelt wurde. In der Arbeit [79] hat Renyuan das Eindringen des elektromagnetischen Feldes in einen REPM-Synchrongenerator analysiert. Allen u.a. [1] betrachteten das dynamische Verhalten der induzierten Wirbelströme in einfachen Anordnungen der NDT-Technik. Bei der zerstörungsfreien Materialprüfung (NonDestructive Testing) wird die Systemantwort auf Erregungen verschiedener Art analysiert. Im besonderen werden leitfähigen Proben mittels periodischer (am

meisten eine Impulssequenz) oder sprungförmiger Erregersignale getestet. Untersucht wurden zwei axialsymmetrische Anordnungen. Bei der periodischen Erregung wurde die Testfunktion in eine Fourier-Reihe entwickelt und dann für jede Harmonische mit Hilfe des FE-Verfahrens die stationäre, komplexe Helmholtz-Differentialgleichung gelöst. Weil das Problem linear betrachtet wurde, werden schließlich die frequenzabhängigen Potentialwerte $A(\omega)$ nach dem Superpositionprinzip aufsummiert. Der Nachteil des vorgeschlagenen Verfahrens besteht darin, daß für weitere Harmonische, wegen immer kleinerer Eindringtiefe, das Diskretisierungsnetz in leitenden Gebieten verfeinert werden muß (Allen u.a. [1] betrachteten die ersten neun Glieder der Fourier-Reihe). Als Vorteil kann man dagegen die relativ einfache Durchführung der numerischen Auswertungen nennen. Im Fall, daß als Testsignal der Einheitssprung vorausgesetzt wurde, haben Allen u.a. [1] die Sprungantwort des Systems mit Hilfe des FE-Verfahrens gewonnen, wobei die Anfangswertaufgabe mittels eines impliziten Schemas gelöst wurde. Für jeden Schritt wurde am entsprechenden Gleichungssystem die Gaussche Elimination angewandt.

Die in den oben besprochenen Beiträgen behandelten nichtstationären elektromagnetischen Prozesse wurden von typischen Strom- bzw. Spannungs-Erregungsfunktionen verursacht. Eine nichtstationäre Wirbelstromaufgabe tritt auch in solchen Fällen auf, in denen die gleichstromdurchflossene Anordnung bewegliche leitende Elemente enthält, wobei die Anregung (Verschiebung oder Geschwindigkeit) sowohl periodisch, als auch sprunghaft sein kann. Diesem Thema wurde die Arbeit [24] von Burias u.a. gewidmet. Es wurde ein Verfahren vorgeschlagen, welches die Analyse von Wirbelstromprozessen gestattet, die durch periodisch bewegliche leitende Teile verursacht werden. Vorausgesetzt wurde eine relativ kleine Verschiebung des beweglichen Elements. In der entsprechenden Diffusionsgleichung wurde zwar keine lineare Geschwindigkeit v benutzt, aber die Bewegung wurde dank der Anwendung des schrittweise korrigierten beweglichen Diskretisierungsnetzes berücksichtigt. Als Berechnungsbeispiel wurde das mathematische Modell eines Lautsprechers betrachtet. Zwei von Gleichstrom durchflossene Spulen wurden coaxial auf einem Kern

angeordnet. Der bewegliche Teil der Anordnung bildet ein Kupfer-ring, deren zeitabhängige, räumliche Lage durch die Funktion $z = z_0 \sin \omega t$ bestimmt wurde. Zur Lösung der axialsymmetrischen Aufgabe hat *Burias u.a.* das FE-Verfahren mit den Dreieckselementen zweiter Ordnung angewandt. Die Anfangswertaufgabe wurde nach einem impliziten Schema gelöst. Obwohl das o.g. Problem linear behandelt wurde, empfiehlt *Burias u.a.* das dargestellte Verfahren auch zur Behandlung von nichtlinearen Aufgaben.

In der letzter Zeit werden einige Beiträge den nichtstationären gekoppelten Feldern gewidmet. *Massè u.a.* [63] haben zum Beispiel die in Systemen der induktiven Erwärmung auftretenden Problemen besprochen und die Anwendungsmöglichkeit des klassischen FE-Verfahrens analysiert. Für die numerische Analyse der gekoppelten elektromagnetischen und Temperaturfelder im magnetischen Umwandlungspunkt (Curie-Punkt) empfiehlt *Massè u.a.* statt des zeitaufwendigen Newton-Raphson-Quasilinearisierungsverfahrens zur nichtlinearen Aufgabe die neue *Prediction-Correction-Methode* (PC-Methode) anzuwenden. *Garg u.a.* [34] haben magnetisch und thermisch gekoppelte Felder in einem stromdurchflossenen, infiniten inhomogenen Zylinder und im Rotor einer Induktionsmaschine untersucht.

Als anwendungsorientierte wissenschaftliche Arbeiten kann man viele weitere Beiträge nennen. Zu dieser Gruppe gehören z.B. die Arbeiten von *Tandon u.a.* [91], *Collard* und *Decarpigny* [26], *Leonard* und *Rodger* [54], sowie *Butler* und *Cendes* [25].

Die dritte Gruppe von Arbeiten bilden Beiträge, in denen Softwarepakete zur rechnergestützten Feldanalyse besprochen werden. Ein Überblick von Programmen hat *Tortschanoff* in [93] dargestellt. *Emson* und *Trowbridge* [33] empfehlen das in Rutheford Appleton Laboratory (UK) bearbeitete Paket *VECTOR* (erweiterte Fassung des kommerziellen Paketes *CARMEN*). *Matsuoka* und *Kameari* [64] präsentieren das FEM-BEM ausgenutzte Softwarepaket *ATSUMI* (Mitsubishi Atomic Power Industries, Inc.) für 3D-Wirbelstromprobleme. *Weili u.a.* [95] haben ein PC-kompatibles Computerprogramm zur 2D- und 3D-Analyse des statischen und dynamischen Verhaltens von Elektromagneten vorgestellt. Das Programm wendet das FE- und Runge-Kutta-Verfahren an. Das Softwarepaket *AZIMUT* (Uni-

versität Liege) wurde von Legros u.a. [53] dargestellt. Es gestattet die numerische Auswertung von 2D elektromagnetischen Feldern und von auf bewegliche leitende Teile wirkende Kräfte. An der TU Szczecin wurde für Großrechner (Odra 1305/Betriebssystem: GEORGE 3, sowie die Computer der ESER-Reihe/Betriebssystem: OS) das Paket SONMAP v.2.0 (siehe Grama und Ziolkowski [37]) bearbeitet. Das Paket gestattet, eine breite Klasse von 2D-Aufgaben der technischen Elektrodynamik zu lösen. Es kann auf flachparallele und axialsymmetrische, lineare und nichtlineare, stationäre und nichtstationäre Feldprobleme angewendet werden. Für einen PC/XT/AT-kompatiblen Rechner ist die Fassung SONMAPmikro entwickelt worden.

In diesem Abschnitt wurden hauptsächlich diejenigen Veröffentlichungen besprochen, die mit der Untersuchung des dynamischen Verhaltens im Zeitbereich verbunden sind. Andere Arbeiten, welche der Analyse dynamischer Prozesse gewidmet wurden, werden im weiteren direkt im Text angegeben.

1.3. Gegenstand der Arbeit; Formulierung der Aufgabenstellung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Analyse von nichtstationären elektromagnetischen und Wärmeprozessen mit Hilfe numerischer Methoden zur Lösung von Randwertaufgaben. Die Feldanalyse wird unter der Voraussetzung linearer Materialeigenschaften durchgeführt.

Ausgangspunkt der theoretischen Betrachtungen ist die Darstellung des nichtstationären Problems in Form einer mit Hilfe der Diffusionsgleichung bestimmten Anfangs-Randwertaufgabe. Bei den numerischen Untersuchungen nichtstationärer Felder wird in dieser Arbeit u.a. die Frequenzanalyse und die Methode der mittleren Zeitkonstante angewandt. Es wird ein erweitertes Konzept der Methode der mittleren Zeitkonstante ausgenutzt, welches Zeitantworten von angenommenen, vereinfachten Übertragungselementen verwendet, wobei die Parameter dieser Elemente vom Ort abhängige Funktionen sind. Wie im Kapitel 5 gezeigt wird, wurde bisher die Methode der mittleren Zeitkonstante nur in Verbindung mit einigen analytischen Verfahren angewandt. Dem Verfasser sind

auch keine wissenschaftliche Arbeiten bekannt, welche der numerischen Bestimmung von Parametern der Übertragungsfunktionen bei nichtstationären Feldaufgaben gewidmet wurden. Ziel der Arbeit ist die Behandlung dieser offenen Probleme und die Darstellung neuer numerischer Untersuchungsmethoden.

Es werden folgende mit dem Gegenstand der Arbeit verbundene Hauptaufgaben gestellt:

1. Bearbeitung von Algorithmen zur numerischen Bestimmung der mittleren Zeitkonstante von Diffusionsprozessen;
2. Bearbeitung von Algorithmen zur numerischen Bestimmung von ortsabhängigen Kenngrößen vereinfachter Übertragungsmodelle von Anordnungen mit verteilten Parameter;
3. Umfassende numerische Analyse der elektromagnetischen Prozesse im Zeit- und Frequenzbereich, sowohl für räumlich begrenzte als auch für räumlich offene Anfangs-Randwertprobleme;
4. Nachprüfung der Konvergenz und Abschätzung der Rechengenauigkeit von bearbeiteten Algorithmen durch den Vergleich mit aus der Literatur bekannten Ergebnissen;
5. Vergleich der numerischen Lösung mit einigen Meßergebnissen.

Es ist nicht Ziel dieser Arbeit, bestimmte praktische Ingenieurprobleme zu lösen, sondern einige Verfahren der numerischen Mathematik weiterzuentwickeln und für den Bedarf der theoretischen Elektrotechnik zu adaptieren. Die Schwerpunkte der vorliegenden Arbeit liegen deshalb in den Aufgaben 1. bis 3., welche mit der Bearbeitung neuer Methoden verbunden sind. Die Aufgaben 4. und 5. spielen eine Hilfsrolle, die jedoch die Beurteilung der Wirksamkeit der vorgeschlagenen Algorithmen gestatten.

Die Mehrzahl der numerischen Berechnungen, die mit der vorliegenden Arbeit verbunden sind, wurden am Institut für Elektronik und Informatik der TU Szczecin durchgeführt. Einige numerische Probleme wurden vom Verfasser während des Forschungsaufenthaltes am Institut für Mathematische Maschinen (Warschau) gelöst.

2. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN NICHTSTATIONÄRER FELDER IN DER ELEKTROTECHNIK

2.1. Allgemeines

Stationäre und besonders nichtstationäre Prozesse, die in technischen Anlagen auftreten, haben in der Regel einen komplizierten Charakter. Sie sind von vielen Faktoren, verschiedenen Erscheinungen, Störungen u.s.w. beeinflusst. Bei theoretischen, manchmal auch experimentellen Untersuchungen der Prozesse, ist oft die Berücksichtigung aller dieser Erscheinungen nicht möglich. Es ist notwendig, ein adäquantes mathematisches Modell anzunehmen, welches die mit dem Untersuchungsziel verbundenen Aufgaben erfüllen wird. Beim Gestalten des Modells werden einige zulässige Vereinfachungen angenommen. Ausgangspunkt bei den theoretischen Untersuchungen dynamischer Prozesse ist die Formulierung von Differentialgleichungen bzw. Differentialgleichungssystemen, sowie der zugehörigen Anfangs und Randbedingungen. Die Gleichungen betreffen das angenommene Modell und werden mittels einiger mathematischer (meistens numerischer) Methoden gelöst. Die Berechnungsmethoden sollen den Konvergenz- und Genauigkeitsbedingungen entsprechen. Ergebnisse der numerischen Auswertungen sind mit einem gewissen Fehler behaftet. Der Fehler kann einerseits mit dem angenäherten Charakter des numerischen Verfahrens verbunden werden und andererseits wird er durch die vorausgesetzten Vereinfachungen verursacht. Deshalb muß man in der Untersuchungspraxis diese theoretisch gewonnenen Ergebnisse nur als "erste Näherung" betrachten. Die entgültige Verifizierung der theoretischen Untersuchungen bildet das Meßexperiment.

In diesem Kapitel werden die Differentialgleichungen formuliert, welche das elektromagnetische Feld im Übergangszustand und die nichtstationäre Wärmeleitung beschreiben. Das nichtstationäre elektromagnetische und Temperaturfeld gehören zu den Prozessen, die in der Elektrotechnik eine wesentliche Rolle spielen. Auf vielen Gebieten der Elektrotechnik, z.B. bei elektrischen Maschinen, der Elektrowärme u.a., sind die langsam veränderlichen Felder von besonderer Bedeutung. Bei diesen Fel-

dern sind die Verschiebungsströme und die Wellenerscheinungen zu vernachlässigen. Diese quasistationären elektromagnetischen Felder und die nichtstationären Wärmefelder sind mit Hilfe von partiellen parabolischen Differentialgleichungen beschreibbar und gehören zur Klasse von Diffusionsvorgängen.

2.2. Das elektromagnetische Feld

Zeitlich veränderliche elektrische und magnetische Felder unterliegen physikalischen Gesetzen, die durch ein System von Gleichungen beschrieben werden, die als Maxwell'sche Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

bekannt sind. Aus den beiden grundlegenden Gleichungen folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (2.3)$$

Außerdem gilt das Gesetz der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.4)$$

Zwischen den Vektorgrößen $\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ und \mathbf{J} gelten die materialabhängige Beziehungen (für lineare, isotrope Materialien)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}. \quad (2.5)$$

Die einzelnen Problemgruppen werden durch Systeme von partiellen Differentialgleichungen beschrieben. Aus den Gln (2.1-2.2) und den Beziehungen (2.5) ergibt sich

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.6)$$

In raumladungsfreien Gebieten ($\rho = 0$) gilt $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, d.h.

$$\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{grad} \epsilon = 0. \quad (2.7)$$

Aus den Gln (2.6-2.7) und der Identität

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \quad (2.8)$$

folgt die Differentialgleichung

$$\Delta \mathbf{E} + \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{E}}{\epsilon} \operatorname{grad} \epsilon \right) = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (2.9)$$

welche ein Vektor der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} in inhomogenen

Gebieten beschreibt.

Der Vektor der magnetischen Feldstärke erfüllt die analoge Gleichung

$$\Delta \mathbf{H} + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{H}}{\mu} \text{grad} \mu \right) = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} . \quad (2.10)$$

Betrachtet man das elektromagnetische Feld im homogenen Raum, so gehen die Gl'n (2.9-2.10) in folgende

$$\Delta \mathbf{E} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} , \quad (2.11)$$

$$\Delta \mathbf{H} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} , \quad (2.12)$$

über. Bei zeitlich langsam veränderlichen Feldern, sowie bei elektromagnetischen Feldern in leitenden Medien kann man die Verschiebungsstromdichte $\partial \mathbf{D} / \partial t$ im Verhältnis zur Leitungsstromdichte \mathbf{J} vernachlässigen. Damit ergeben sich die Beschreibungsgleichungen des quasistationären Feldes zu

$$\Delta \mathbf{E} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (2.13)$$

$$\Delta \mathbf{H} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} . \quad (2.14)$$

Die Analyse kann sehr oft durch die Einführung von Hilfsvektor-Potentialfunktionen beträchtlich erleichtert werden. Im quasistationären Fall erhält man unter der Annahme $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ und $\text{div} \mathbf{A} = 0$ aus Gl. (2.2)

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{A} \quad (2.15)$$

und schließlich

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} V_e , \quad (2.16)$$

wobei \mathbf{A} - das magnetische Vektorpotential und V_e - das elektrische Skalarpotential ist. Mit $\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_w$, wobei \mathbf{J}_e die eingeprägte Stromdichte der Erregung und \mathbf{J}_w die Wirbelstromdichte bedeuten, erhält man

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = - \gamma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} V_e \right) = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_w \quad (2.17)$$

und

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} \right) = - \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{J}_e . \quad (2.18)$$

Mit der Annahme $\mathbf{H} = \mathbf{T} - \text{grad } V_m$, wobei \mathbf{T} - das elektrische Vektorpotential und V_m - das magnetische Skalarpotential sind, erhält man aus der ersten Maxwell'schen Gleichung

$$\mathbf{J} = \text{rot}(\mathbf{T} - \text{grad } V_m) = \text{rot} \mathbf{T} . \quad (2.19)$$

Man kann bemerken, daß durch die Beziehung $\text{div rot} \mathbf{T} = 0$, die Quellenfreiheit der Stromdichte gesichert ist. Das elektrische Vektorpotential \mathbf{T} gestattet, Aufgaben der Feldverteilung in stromdurchflossenen Gebieten zu lösen. Die Ströme können sowohl durch externe elektromotorische Kräfte (EMK) erregt, als auch durch zeitlich veränderliche Felder induziert werden.

Aus der Bedingung der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion (2.4) erhält man die Bestimmungsgleichung für das magnetische Skalarpotential

$$\text{div}[\mu(\mathbf{T} - \text{grad } V_m)] = 0 . \quad (2.20)$$

Aus der zweiten Maxwell'schen Gleichung ergibt sich schließlich

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\gamma} \text{rot} \mathbf{T}\right) = - \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{T} - \mu \text{grad } V_m) . \quad (2.21)$$

Das elektrische Vektorpotential kann man in zwei Anteile (Erregung und Wirbelströme) aufspalten

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_w , \quad (2.22)$$

wobei $\text{rot} \mathbf{T}_e = \mathbf{J}_e$ und $\text{rot} \mathbf{T}_w = \mathbf{J}_w$. Die beiden Vektorpotentiale \mathbf{T}_e und \mathbf{T}_w sind nicht eindeutig bestimmt und man kann noch den Gradient eines skalaren Potentials hinzuaddieren. Es ist nun sinnvoll, diesen Anteil bei \mathbf{T}_w so vorzugeben, daß außerhalb des Wirbelstrombereiches \mathbf{T}_w verschwindet. Im Bereich ohne Wirbelströme erhält man mit $\mathbf{T}_w = 0$ folgende Gleichung für ein unbekanntes magnetisches Skalarpotential V_m

$$\text{div}(\mu \text{grad } V_m) = \text{div}(\mu \mathbf{T}_e) \quad (2.23)$$

und dann die magnetische Feldstärke $\mathbf{H} = \mathbf{T}_e - \text{grad } V_m$. Im Wirbelstrombereich muß jedoch die Gl. (2.21) für das elektrische Vektorpotential gelöst werden.

Da das Vektorpotential \mathbf{T}_e die Erregerströme $\mathbf{J}_e = \text{rot} \mathbf{T}_e$ beschreibt, kann es relativ einfach über das Durchflutungsgesetz ermittelt werden.

2.3. Nichtstationäre Wärmeleitung

Die Wärme kann dank verschiedener Erscheinungen übertragen werden. In festen Körpern, aber auch in ruhenden Flüssigkeiten und ruhenden Gasen, wird die thermische Energie infolge atomarer und molekularer Wechselwirkung unter dem Einfluß einer ungleichförmigen Temperaturverteilung transportiert. Diese Art der Wärmeübertragung wird Wärmeleitung genannt.

Das von Fourier formulierte Grundgesetz der Wärmeleitung lautet, daß die Wärmestromdichte (der Wärmefluß) dem Temperaturgradienten proportional und entgegengesetzt gerichtet ist. Das Gesetz ist durch die Beziehung

$$q = -\lambda \text{grad } T \quad (2.24)$$

bestimmt. Der Proportionalitätsfaktor λ heißt Wärmeleitfähigkeit (innere Wärmeleitfähigkeit) der Substanz und ist im allgemeinen temperatur- und druckabhängig.

Bei der Ableitung der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung (Differentialgleichung von Fourier) wird vorausgesetzt, daß das Medium weder Phasen- noch chemischen Umwandlungen unterliegt. Für einen mit der Hüllfläche Γ abgeschlossenen Raum Ω kann man die Wärmeleistungsbilanz ziehen

$$P_1 = P_2 + P_3, \quad (2.25)$$

wobei P_1 - die entstehende, P_2 - die aufgespeicherte und P_3 - die austretende Wärmeleistung bedeuten. Die Bilanz gilt für jeden Zeitpunkt t .

Die Leistung P_1 ist mit dem Vorhandensein von inneren Wärmequellen verbunden, wobei die Wärme aus verschiedenen Energiearten, z.B. elektrischer Energie entstehen kann. Die Ergiebigkeit dieser Quellen bestimmt die Leistungsdichte q_v , die meistens eine orts- und zeitabhängige Funktion darstellt. Die Leistung P_1 kann damit wie folgt angegeben werden

$$P_1 = \int_{\Omega} q_v d\Omega. \quad (2.26)$$

Die aufgespeicherte Wärmeleistung P_2 ist mit der Temperatursteigerung pro Zeiteinheit $\partial T / \partial t$ durch die Beziehung

$$P_2 = \int_{\Omega} c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \quad (2.27)$$

verbunden. Dabei ist c_p - die spezifische Wärme bei konstantem Druck und ρ - die Dichte des Körpers.

Ein Teil der Wärmemenge tritt durch die Hüllfläche Γ des Raumes nach außen. Wenn q die Stromdichte der austretenden Wärme ist, dann ist die Leistung P_g durch die Beziehung

$$P_g = \oint_{\Gamma} q dS \quad (2.28)$$

bestimmt. Setzt man die Wärmestromdichte (2.24) in das Integral (2.28) ein, so ergibt sich

$$P_g = - \oint_{\Gamma} \lambda \text{grad } T \cdot dS . \quad (2.29)$$

Nach der Anwendung des Gausschen Satzes auf das letzte Integral, kann man die Wärmeleistungsbilanz (2.25) wie folgt formulieren

$$\int_{\Omega} q_v d\Omega = \int_{\Omega} [c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \text{grad } T)] d\Omega . \quad (2.30)$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$\text{div}(\lambda \text{grad } T) + q_v - c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0 , \quad (2.31)$$

welche das nichtstationäre Temperaturfeld unter Berücksichtigung des Vorhandenseins von inneren Wärmequellen beschreibt.

3. ZUR CHARAKTERISIERUNG DYNAMISCHER PROZESSE

3.1. Systeme mit konzentrierten und verteilten Parametern

Systeme in denen keine Ortsabhängigkeit der Variablen (Parametern) vorhanden ist, bezeichnet man als Systeme mit konzentrierten Eigenschaften oder konzenrierten Parametern. Das dynamische Verhalten dieser Systemen wird mit Hilfe von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder Differentialgleichungssystemen beschrieben. Der mathematische Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung muß nicht an jedem Ort gleich sein. In diesem Fall spricht man von verteilten Eigenschaften des Systems oder vom System mit verteilten Parametern. Prozesse, die in solchen Systemen auftreten, sind zeit- und ortsabhängig und mit partiellen Differentialgleichungen oder Differentialgleichungssystemen beschreibbar. In den einzelnen Raumpunkten P kann man jedoch das dynamische Verhalten des Systems mit verteilten Parametern mit Hilfe ähnlicher Methoden charakterisieren, wie für Systeme mit konzentrierten Parametern. Für das lineare System kann man z.B. die ortsabhängige Übertragungsfunktion $K(P,s)$, Verzögerung, Laufzeit usw. einführen. Im weiteren werden einige Methoden zur Charakterisierung dynamischer Eigenschaften von Systemen besprochen.

3.2. Kennfunktionen linearer Systeme

Bei der Untersuchung dynamischer Prozesse in linearen Systemen werden oft Systemantworten auf typische Erregerfunktionen (Testfunktionen) bestimmt. Das Zeitverhalten bei diesen Erregerfunktionen zeugt von den dynamischen Eigenschaften des Systems.

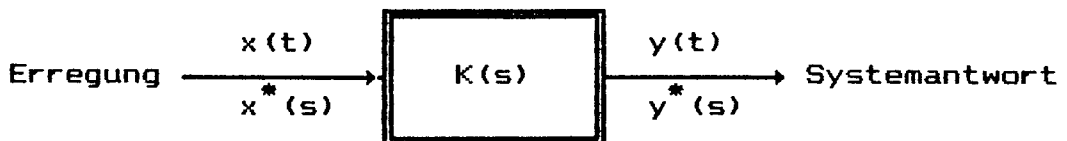


Bild 3.1. Ein lineares System

Aufgrund dieser Antwortfunktionen (Kennfunktionen) kann man die

Antwort $y(t)$ eines Systems (Bild 3.1) bei beliebiger Erregung $x(t)$ auswerten.

3.2.1. Impulsantwort

Als Impulsantwort bezeichnet man die Systemantwort auf eine kurzdauernde Stoßfunktion

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } t < 0 \\ 1/\Delta t & , \text{ für } 0 \leq t \leq \Delta t \\ 0 & , \text{ für } t \geq \Delta t \end{cases} \quad (3.1)$$

Im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ bildet die Erregung $\delta(t)$ ein unendlich schmales und unendlich hohen Impuls der Fläche 1, ein sogenannter Dirac-Impuls. Die Antwort des Systems auf den Dirac-Impuls ist die Gewichtsfunktion $g(t)$. Aufgrund der Kenntnis von $g(t)$ kann mit Hilfe des bekannten Faltungsintegrals

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (3.2)$$

die zu beliebiger Erregung $x(t)$ gehörige Antwortfunktion $y(t)$ ermittelt werden. Mit Annahme, daß sich das System bei $t = 0$ im Ruhezustand befindet gilt

$$y(t) \approx \sum_{k=0}^{n=t/\Delta\tau} x(\tau)\Delta\tau g(t-\tau), \quad \tau = k\Delta\tau \quad (3.3)$$

Bei der Berechnung der Faltungsintegrale kann man auch andere Integrationsverfahren [35] anwenden.

3.2.2. Sprungantwort und Übergangsfunktion

Bei einer sprungförmigen Erregung

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } t < 0 \\ x_0 & , \text{ für } t \geq 0 \end{cases} \quad , \quad (3.4)$$

erhält man als Ausgangsgröße $y(t)$ die Sprungantwort.

Wird diese Sprungantwort auf die Amplitude der Erregerfunktion bezogen, so erhält man die Übergangsfunktion

$$h(t) = y(t)/x_0 \quad (3.5)$$

die von dem bei der Aufnahme der Sprungantwort gewählten Wert

der Eingangsgröße unabhängig wird.

Die Kenntnis von $h(t)$ gestattet, mit Hilfe des Duhamel-Integrals die Systemantwort $y(t)$ bei beliebiger Erregung $x(t)$ zu bestimmen. Für stetige Funktionen $h(t)$ und $\dot{x}(t)$ ergibt sich

$$y(t) = h(t)x(+0) + h(t)*\dot{x}(t) . \quad (3.6)$$

Wenn $\dot{h}(t)$ und $x(t)$ stetige Funktionen sind, bestimmt man die Systemantwort aus der Beziehung

$$y(t) = h(+0)x(t) + \dot{h}(t)*x(t) , \quad (3.7)$$

wobei $h(t)*\dot{x}(t)$ die Faltung der Funktionen $h(t)$ und $\dot{x}(t)$ symbolisiert, d.h.

$$h(t)*\dot{x}(t) \equiv \int_0^t h(\tau)\dot{x}(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau . \quad (3.8)$$

Eine analytische Auswertung des Faltungsintegrals ist im allgemeinen nicht möglich, so daß hierfür numerische Integrationsverfahren anzusetzen sind. Zum Beispiel kann die Funktion $y(t)$ als eine der Summen

$$y(t) \approx h(t)x(+0) + \sum_{k=0}^{n=t/\Delta\tau} h(t-\tau)\Delta\tau\dot{x}(\tau) \quad (3.9)$$

oder

$$y(t) \approx h(+0)x(t) + \sum_{k=0}^{n=t/\Delta\tau} \dot{h}(\tau)\Delta\tau x(t-\tau) \quad (3.10)$$

mit $\tau = k\Delta\tau$ dargestellt werden.

3.3. Beschreibung des dynamischen Verhaltens im Frequenzbereich

Neben Stoß- oder Sprungfunktionen treten als determinierte Testfunktionen auch harmonische Erregungen an

$$x(t) = x_0 \sin \omega t . \quad (3.11)$$

Am Ausgang erreicht man eine sinusförmige Antwort gleicher Kreisfrequenz, die jedoch eine andere Amplitude und eine Phasenverschiebung gegenüber der Erregung aufweisen wird

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \phi) . \quad (3.12)$$

Ergebnis dieser Untersuchung, die in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω durchgeführt werden muß, sind das Amplitudenverhältnis y_0/x_0 (Amplitudengang) und die Phasenverschiebung $\phi(\omega)$

(Phasengang).

Dynamische Eigenschaften eines Systems kann man mit Hilfe einer komplexen Funktion

$$\underline{E}(j\omega) = |\underline{E}(j\omega)| e^{j\alpha(\omega)}, \quad (3.13)$$

eines sogenannten Frequenzganges charakterisieren, wobei $|\underline{E}(j\omega)| = y_0/x_0$ und $\alpha(\omega) = \phi$ sind. Die Funktion $\underline{E}(j\omega)$ ist für die Untersuchung linearer Systeme besonders geeignet. Mit ihrer Hilfe kann man nach Anwendung der inversen Fourier-Transformation auch das Zeitverhalten des Systems bestimmen.

Für ein stabiles System gilt [72]

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (3.14)$$

wobei $P(\omega) = \operatorname{Re}[\underline{E}(j\omega)]$ ist. Die Beziehung (3.14) gestattet, die Übergangsfunktion $h(t)$ des Systems zu ermitteln, wobei die Integration wie folgt durchgeführt werden kann [72]:

$$h(t) \approx \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{2}{\pi} \frac{P_k \omega_{k+1} - P_{k+1} \omega_k}{\omega_{k+1} - \omega_k} [\operatorname{Si}(\omega_{k+1} t) - \operatorname{Si}(\omega_k t)] t + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \frac{P_{k+1} - P_k}{\omega_{k+1} - \omega_k} \frac{\cos \omega_k t - \cos \omega_{k+1} t}{t} \right\}, \quad (3.15)$$

mit $P_i = P(\omega_i)$. Die Funktion $\operatorname{Si}(x)$ bedeutet Integralsinus:

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin z}{z} dz. \quad (3.16)$$

3.4. Mittlere Zeitkonstante

Die zeit- und ortsabhängige Funktion $U(P, t)$, welche einen Diffusionsprozess beschreibt und eine partielle Differentialgleichung parabolischer Art erfüllt, kann man in jedem Raumpunkt P als eine unendliche Summe der elementaren Exponentialfunktionen

$$U(P, t) = U(P, \infty) - \sum_{i=1}^{\infty} U_i(P) \exp(-t/\tau_i) \quad (3.17)$$

darstellen. Der nichtstationäre Verlauf wird demnach mit Hilfe

ortsabhängiger "Koeffizienten" $U_i(P)$ und der Zeitkonstanten τ_i beschrieben, wobei $U(P, \infty)$ die Lösung eines stationären Problems ist. Die Auswertung von $U_i(P)$ und τ_i ist nur für einfache Fälle möglich, d.h. nur für Aufgaben, die wegen einfacher Geometrie analytisch lösbar sind. Auch die experimentellen Methoden sind für die Bestimmung von $U_i(P)$ und τ_i kaum geeignet. Aufgrund der gemessenen Systemantworten werden in der Regel nur einige, das dynamische Verhalten charakterisierende Parameter, z.B. die Lauf- oder Verzögerungszeit bestimmt. In vielen Fällen reicht für praktische Ziele die Kenntnis der Dauer eines nichtstationären Zustandes und der räumlichen Feldverteilung in einem stationären Zustand $U(P, \infty)$. Die stationären Felder werden mit Hilfe partieller elliptischer Differentialgleichungen beschrieben, die im Vergleich zu den parabolischen Gleichungen leichter zu lösen sind. Die zeitlich-räumlichen Ausgleichsvorgänge lassen sich sehr bequem und anschaulich durch die Angabe einer Zeitkonstante charakterisieren. Um eine die zeitliche Gesamtzustandsänderung des Ausgleichsvorgangs charakterisierende Zeitkonstante als einfache Zahl angeben zu können, wurde in [2,56,69] eine "mittlere charakteristische Zeit" τ nach Gl.(3.18) definiert

$$\tau(P) = \int_0^{\infty} \frac{U(P,t) - U(P,\infty)}{U(P,0) - U(P,\infty)} dt . \quad (3.18)$$

Die mittlere Zeitkonstante $\tau(P)$ bestimmt die Dauer eines aperiodischen Ausgleichsvorgangs $U(P,t)$ in jedem Punkt P des Raumes.

In linearen Medien ist diese Zeitkonstante vom Zeitverlauf der Erregung unabhängig. Sie hängt dagegen ab von der räumlichen Verteilung der Quellen auf dem Rand und im Inneren des untersuchten Gebietes. Die mittlere Zeitkonstante kann aufgrund der numerisch oder experimentell gewonnenen Sprungantwort ermittelt werden. Zur Normierung der Sprungantwort wird die Funktion

$$f(P,t) = \frac{U(P,t) - U(P,0)}{U(P,\infty) - U(P,0)} \quad (3.19)$$

eingeführt. Die Funktion $f(P,t)$ ist der Übergangsfunktion $h(P,t)$ proportional: $h(P,t) = K_0(P)f(P,t)$, wobei $K_0(P)$ die Rolle des Übertragungsfaktors spielt. Daraus folgt die Beziehung

$$\tau(P) = \int_0^{\infty} [1 - f(P,t)] dt \quad (3.20)$$

und die graphische Interpretation der Zeitkonstante $\tau(P)$ (Bild 3.2).

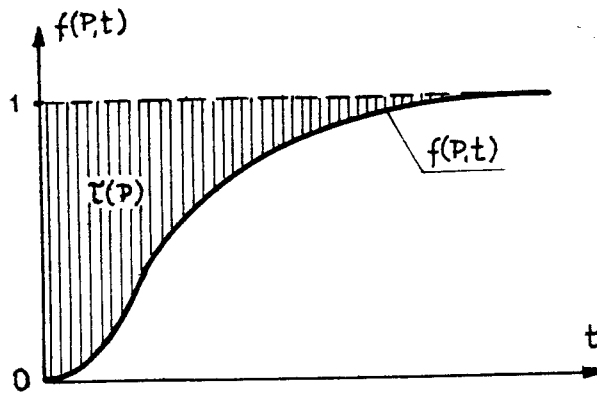


Bild 3.2. Graphische Interpretation der mittleren Zeitkonstante

Dank der mittleren Zeitkonstanten kann man den mit Hilfe von vielen Zeitkonstanten τ_i bestimmten Diffusionsvorgang (3.17) in der genäherten Form

$$U(P,t) \approx U_a(P,t) = U(P,\infty) + [U(P,0) - U(P,\infty)] \cdot \exp[-t/\tau(P)] \quad (3.21)$$

darstellen, wobei $\tau(P)$ als Gewichtsmittelwert von τ_i

$$\tau(P) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} [\tau_i U_i(P)]}{\sum_{i=1}^{\infty} U_i(P)} \quad (3.22)$$

betrachtet werden kann.

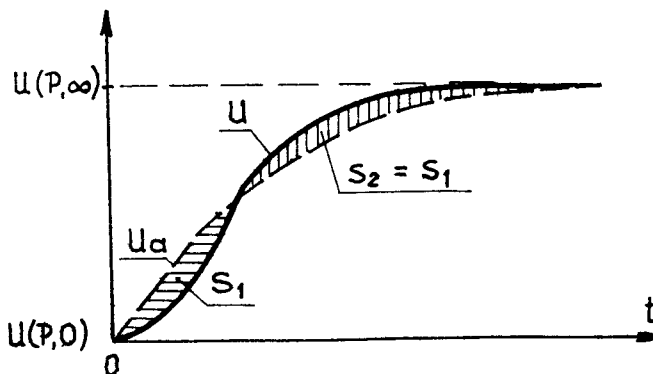


Bild 3.3. Exakter (U) und genäherter (U_a) Diffusionsverlauf

Der Verlauf $U_a(P,t)$, welcher der Antwort eines Proportionalgliedes mit Verzögerung 1. Ordnung (PT_1) entspricht, kann bei vielen praktischen Aufgaben eine ausreichende Näherung des Verlaufs $U(P,t)$ bilden, wobei für den Absolutfehler $\Delta = U - U_a$ gilt (Bild 3.3)

$$\int_0^{\infty} \Delta dt = 0 . \quad (3.23)$$

4. NUMERISCHE BEHANDLUNG VON DIFFUSIONSPROZESSEN

4.1. Mathematische Problemformulierung

Die Feldgrößen, die das quasistationäre elektromagnetische Feld bestimmen (elektrische und magnetische Feldstärke, sowie elektrisches und magnetisches Vektorpotential) werden durch Vektordifferentialgleichungen (siehe Kapitel 2) beschrieben. Das nichtstationäre Temperaturfeld bei Wärmeleitungsproblemen erfüllt dagegen eine Skalgleichung. Vom mathematischen Standpunkt aus gehören diese Vektor- und Skalgleichungen zu einer Klasse der partiellen Differentialgleichungen parabolischer Art und zu ihrer Lösung werden dieselben numerischen Verfahren angewandt. Die Lösung einer Vektorgleichung besteht darin, daß für die Komponenten der gesuchten Vektorfunktion entsprechende skalare Differentialgleichungen formuliert und gelöst werden.

In diesem Kapitel werden einige der bekanntesten Verfahren zur numerischen Behandlung von nichtstationären Randwertaufgaben besprochen.

Das Anfangs-Randwertproblem wird wie folgt formuliert:

Gesucht wird die zweimal differenzierbare Funktion $U(P,t)$, die in jedem Punkt P des Raumes Ω mit einem stückweise glatten Rand Γ die Differentialgleichung

$$\operatorname{div}(w_1 \operatorname{grad} U) = w_2 \frac{\partial U}{\partial t} - w_3 \quad (4.1)$$

erfüllt. Die Randbedingungen können entsprechend der Problemstellung verschiedener Art sein:

$$[U(P,t) - U_\Gamma(P,t)]_{P \in \Gamma_1} = 0, \quad (4.2)$$

$$[w_1 \operatorname{grad}_n U + w_4 U + w_5]_{P \in \Gamma_2} = 0, \quad (4.3)$$

wobei $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ und $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Die Anfangsbedingung dieser Aufgabe lautet:

$$U(P,t=0) = U_0(P) \quad (4.4)$$

Die Funktionen w_1, \dots, w_5 besitzen für jedes praktische Problem eine bestimmte physikalische Interpretation. Die Funktionen w_1, w_2, w_4 charakterisieren die Eigenschaften des Gebietes, dagegen

bilden w_3 und w_5 eine Erregung (einen Eingangsvorgang).

4.2. Behandlung des Randwertproblems zur Bestimmung der Raum- lösung

4.2.1. Galerkinsches Verfahren

Die im Abschnitt 4.1 formulierte Randwertaufgabe kann mit Hilfe des Galerkinsches Verfahrens gelöst werden. Um diese Aufgabe näherungsweise zu lösen, wähle man einen Satz $\{\phi_i(P)\}_{i=1}^n$ von linear unabhängigen Funktionen. Wenn die Koordinatenfunktionenfolge $\{\phi_i(P)\}_{i=1}^n$ einen reellen, normierten und linearen Raum $\mathcal{X}_n(\Omega)$ der im Gebiet Ω definiten Funktionen bildet, so kann man die genäherte Lösung $U_a(P,t) \in \mathcal{X}_n(\Omega)$ des Randwertproblems (4.1-4.4) in folgender Form darstellen

$$U_a(P,t) = \phi_0(P,t) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \phi_i(P), \quad (4.5)$$

wobei $[\phi_0(P,t)]_{P \in \Gamma_1} = U_\Gamma(P,t)$ ist. Die unbekannten zeitabhängigen Funktionen $\psi_i(t)$ werden mit Hilfe der allgemeinen Methode von Galerkin bestimmt.

Gemäß der Methode soll die Lösung der Dgl. (4.1) die Orthogonalitätsforderung

$$\int_{\Omega} [w_2 \frac{\partial U}{\partial t} - w_3 - \operatorname{div}(w_1 \operatorname{grad} U)] \phi_i d\Omega = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.6)$$

erfüllen. Die Galerkinschen Bedingungsgleichungen (4.6) werden nur für einen festen Zeitpunkt t bezüglich des Grundgebietes formuliert.

Unter Berücksichtigung der Identität

$$-\operatorname{div}(w_1 \operatorname{grad} U) \phi_i = w_1 \operatorname{grad} \phi_i \cdot \operatorname{grad} U - \operatorname{div}(\phi_i w_1 \operatorname{grad} U), \quad (4.7)$$

erhält man nach der Anwendung des Gausschen Satzes

$$\int_{\Omega} (w_1 \operatorname{grad} \phi_i \cdot \operatorname{grad} U + w_2 \phi_i \frac{\partial U}{\partial t} - w_3 \phi_i) d\Omega - \oint_{\Gamma} \phi_i w_1 \operatorname{grad} U \cdot d\Gamma = 0. \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.8)$$

Daraus und aus der Randbedingung (4.3) folgt

$$\int_{\Omega} (w_1 \text{grad } \phi_i \cdot \text{grad } U + w_2 \phi_i \frac{\partial U}{\partial t} - w_3 \phi_i) d\Omega + \int_{\Gamma_2} (w_4 U + w_5) d\Gamma = 0 \quad (4.9)$$

(i=1, 2, ..., n)

Nach Einsetzen der genäherten Lösung (4.5) in (4.9) ergibt sich schließlich ein System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\sum_{j=1}^n \psi_j \left(\int_{\Omega} w_1 \text{grad } \phi_i \cdot \text{grad } \phi_j d\Omega + \int_{\Gamma_2} w_4 \phi_i \phi_j d\Gamma \right) + \sum_{j=1}^n \frac{d\psi_j}{dt} \int_{\Omega} w_2 \phi_i \phi_j d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \left(w_3 - w_2 \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right) \phi_i - w_1 \text{grad } \phi_0 \cdot \text{grad } \phi_i d\Omega - \int_{\Gamma_2} (w_4 \phi_0 + w_5) \phi_i d\Gamma \quad (4.10)$$

(i=1, 2, ..., n)

Diesem Differentialgleichungssystem sind gewisse Konstanten $\psi_i(0)$ zugeordnet, die den Anfangswerten entsprechen. Diese Anfangswerte sollen die Erfüllung der Anfangsbedingung (4.4) gewährleisten. Gemäß dem Ansatz (4.5) sollte gelten

$$\phi_0(P, 0) + \sum_{i=1}^n \psi_i(0) \phi_i(P) = U_0(P), \quad P \in \Omega. \quad (4.11)$$

Die Anfangswerte $\psi_i(0)$ können nach zwei Prinzipien ermittelt werden: nach dem Galerkinschen Prinzip bzw. mit Hilfe der Methode der kleinsten quadratischen Abweichungen. Im ersten Fall ergeben sich folgende Gleichungen [84]:

$$\sum_{j=1}^n \psi_j(0) \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega + \int_{\Omega} [\phi_0(P, 0) - U_0(P)] \phi_i d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

(i=1, 2, ..., n)

Im zweiten Fall soll die Minimalforderung [49]

$$\int_{\Omega} w(P) [U_a(P, 0) - U_0(P)]^2 d\Omega = \text{Minimum} \quad (4.13)$$

erfüllt werden, wobei $w(P)$ eine Wichtungsfunktion bedeutet. Daraus ergibt sich ein System von linearen Gleichungen [9]

$$\sum_{j=1}^n \psi_j(0) \int_{\Omega} w(P) \phi_i \phi_j d\Omega - \int_{\Omega} w(P) U_0(P) \phi_i d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

(i=1, 2, ..., n)

zur Bestimmung der unbekannten $\psi_j(0)$.

4.2.2. Methode der finiten Elemente

Nach Anwendung des Galerkinschen Verfahrens wird die Randwert-aufgabe (4.1–4.4) zur Lösung des Differentialgleichungssystems (4.10) mit den durch entsprechende Integrale angegebenen Koeffizienten ausgeführt. Die analytische Bestimmung dieser Integrale ist in der Regel nicht möglich, so muß beim geometrisch komplizierten Integrationsgebiet bzw. bei komplizierter Gestalt der Koordinatenfunktionen die zeitaufwendige numerische Integration durchgeführt werden. Die Methode der finiten Elemente (FEM) bildet eine besondere Art praktischer Realisierung des Galerkinschen Verfahrens, bei der sich diese Integration relativ einfach entweder analytisch oder numerisch durchführen läßt. Bei dieser Methode wird nun das betrachtete Grundgebiet Ω in einfache, durch die Netzknoten P_i, P_j, P_k, \dots bestimmte Teilbereiche (finite Elemente) Ω^e zerlegt und die unbekannte Funktion $U(P, t)$ innerhalb jedes finiten Elements durch eine Kombination von linear unabhängigen Koordinatenfunktionen (Formfunktionen) $N_i(P), N_j(P), N_k(P), \dots$

$$U^e(P, t) = \begin{Bmatrix} N_i(P) \\ N_j(P) \\ N_k(P) \\ \vdots \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} u_i(t) \\ u_j(t) \\ u_k(t) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{N(P)\}^T \cdot \{u(t)\}^e \quad (4.15)$$

approximiert, wobei

$$N_i(P_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (4.16)$$

und $u_i(t), u_j(t), u_k(t), \dots$ die Lösung des Randwertproblems in den Elementeknoten darstellen.

Die Formfunktionen hängen vom gewählten Elemente-Typ ab. Im Fall von zweidimensionalen Aufgaben wird das Grundgebiet in Dreiecke, Parallelogramme, krummlinige Dreiecke oder Vierecke eingeteilt. Bei räumlichen (3D) Problemen erfolgt eine Diskretisierung des dreidimensionalen Gebietes in Tetraederelemente, Quaderelemente oder andere dem Problem angepaßte, möglicherweise krummlinig berandete Elemente.

Wendet man die Methode von Galerkin auf das Randwertproblem

(4.1-4.4) an, so erhält man nach einer entsprechenden Zwischenrechnung ein Differentialgleichungssystem für die unbekannten Funktionen $u_i(t), u_j(t), u_k(t), \dots$ in den Elementeknoten in der Matrixschreibweise [84, 98]

$$[H]^e \{u\}^e + [C]^e \{\dot{u}\}^e + \{F\}^e = 0, \quad (4.17)$$

mit $\{\dot{u}\}^e = d\{u\}^e/dt$.

Die Koeffizienten h_{ij}^e und c_{ij}^e der symmetrischen Matrizen, der Steifigkeitselementematrix $[H]^e$ und der Massenelementematrix $[C]^e$, sind durch

$$h_{ij}^e = \int_{\Omega^e} w_1 \text{grad } N_i \cdot \text{grad } N_j d\Omega + \int_{\Gamma^e} w_4 N_i N_j d\Gamma \quad (4.18)$$

bzw.

$$c_{ij}^e = \int_{\Omega^e} w_2 N_i N_j d\Omega \quad (4.19)$$

und die Koeffizienten f_i^e des Spaltenvektors $\{F\}^e$ durch

$$f_i^e = - \int_{\Omega^e} w_3 N_i d\Omega + \int_{\Gamma^e} w_5 N_i d\Gamma \quad (4.20)$$

gegeben.

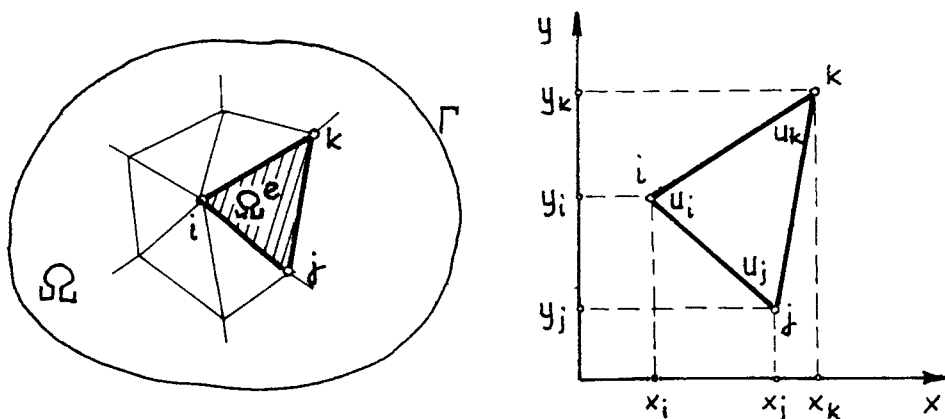


Bild 4.1. Unterteilung des Gebietes in Dreieckselemente

Die oben angegebenen Integrale lassen sich analytisch nur in wenigen sehr einfachen Fällen berechnen. Werden z.B. lineare Dreieckselemente (Bild 4.1) angewandt, d.h.

$$N_m = (a_m + b_m x + c_m y) / (2\Delta), \quad m = i, j, k, \quad (4.21)$$

wobei

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

und $a_i = x_j y_k - x_k y_j$; $b_i = y_j - y_k$; $c_i = x_k - x_j$, so ergibt sich

$$\int_{\Omega^e} \text{grad}\{N\} \cdot \text{grad}\{N\}^T d\Omega = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2, & b_i b_j + c_i c_j, & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j^2 + c_j^2, & b_j b_k + c_j c_k \\ \text{sym.} & & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\int_{\Omega^e} \{N\} \cdot \{N\}^T d\Omega = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ \text{sym.} & & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

$$\int_{\Omega^e} \{N\} d\Omega = \frac{\Delta}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (4.24)$$

Andere Beispiele der analytischen Integration werden z.B. in [84] angegeben. Falls keine Möglichkeit der analytischen Integration vorhanden ist, werden die Matrixelemente numerisch ermittelt. Die numerische Integration wird bei Verwendung isoparametrischer Elemente mit Hilfe der Gausschen Quadratur durchgeführt.

Die berechneten Elementgleichungssysteme (4.17) werden entsprechend aufsummiert (assembliert)

$$H_{ij} = \sum_e h_{ij}^e, \quad C_{ij} = \sum_e c_{ij}^e, \quad F_i = \sum_e f_i^e \quad (4.25)$$

und anschließend erhält man das resultierende Gesamtgleichungssystem

$$[H]\{u\} + [C]\{\dot{u}\} + \{F\} = 0, \quad (4.26)$$

wobei $\{\dot{u}\} = d\{u\}/dt$ ist.

Dem Differentialgleichungssystem (4.26) wird ein Spaltenvektor $\{u\}_0$ zugeordnet, der die Anfangswerte der gesuchten Funktion in Elementeknoten enthält. Die Gesamtmatrizen $[H]$ und $[C]$ sind symmetrisch und schwach mit von Null verschiedenen Elementen besetzt. Die Position der von Null verschiedenen Außendiagonalelemente ist von der gewählten Knotennumerierung abhängig. Aus programmtechnischen Gründen ist es deshalb zweckmäßig, diese Numerierung optimal durchzuführen, um Gesamtmatrizen mit möglichst minimaler Bandbreite erreichen zu können. Zur optimalen Numerie-

rung sind verschiedene Algorithmen entwickelt worden. Als die bekannteste werden in der Literatur [84] der Algorithmus von Rosen und der auf einigen graphentheoretischen Überlegungen basierende Algorithmus von Cuthill und McKee angegeben.

4.2.3. Differenzenverfahren

Das Differenzenverfahren (Methode der finiten Differenzen) gehört neben der besprochenen Methode der finiten Elemente zu den in der Ingenieurpraxis meist angewendeten Diskretisierungsverfahren. Das Verfahren hat eine umfangreiche Literatur, z.B. [27] und wird sowohl theoretisch, als auch praktisch gut beherrscht.

Um das Rechenschema darstellen zu können, wird die Randwertaufgabe (4.1-4.3) wie folgt formuliert

$$\begin{cases} L[U] = w_2 \frac{\partial U}{\partial t} - w_3, & \text{im Raum } \Omega \\ B_\Gamma[U] = w_\Gamma, & \text{auf dem Rand } \Gamma \end{cases} \quad (4.27)$$

$$(4.28)$$

wobei L ein elliptischer Differentialoperator bedeutet und $B_\Gamma[U]$ im allgemeinen eine Linearkombination von U und $\partial U / \partial n$ (die Richtungsableitung von U in die Richtung der Normalen zum Rand Γ) sein kann.

Beim Differenzenverfahren wird das betrachtete Gebiet Ω mit einem Gitter überzogen und auf dem Operator L (eventuell auch B_Γ) eine Differenzenapproximation angewandt. Die Differenzenoperatoren L und B_Γ werden durch die Näherungs-Operatoren L^d und B_Γ^d ersetzt. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem:

$$\begin{cases} L^d[U] \approx w_2 \frac{\partial U}{\partial t} - w_3, & \text{im Raum } \Omega \\ B_\Gamma^d[U] \approx w_\Gamma, & \text{auf dem Rand } \Gamma. \end{cases} \quad (4.29)$$

$$(4.30)$$

Die Umformung der Differentialoperatoren besteht darin, daß die Differentialquotienten in bestimmten Punkten (Gitterknoten) des Raumes Ω mit den entsprechenden Differenzenquotienten approximiert werden. Die Gestalt der Differenzenquotienten ist von der verwandten Gitterart abhängig. Benutzt man z.B. ein zweidimensionales Rechteckgitter der Maschenweite h_x bzw. h_y (Bild 4.2), so erhält man für jeden inneren Gitterknoten $P_i(x_i, y_i)$ die

Approximation

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x_i + h_x, y_i, t) - U(x_i - h_x, y_i, t)}{2h_x} + O(h_x^2), \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U(x_i, y_i + h_y, t) - U(x_i, y_i - h_y, t)}{2h_y} + O(h_y^2) \quad (4.32)$$

und

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x_i + h_x, y_i, t) - 2U(x_i, y_i, t) + U(x_i - h_x, y_i, t)}{h_x^2} + O(h_x^4), \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U(x_i, y_i + h_y, t) - 2U(x_i, y_i, t) + U(x_i, y_i - h_y, t)}{h_y^2} + O(h_y^4). \quad (4.34)$$

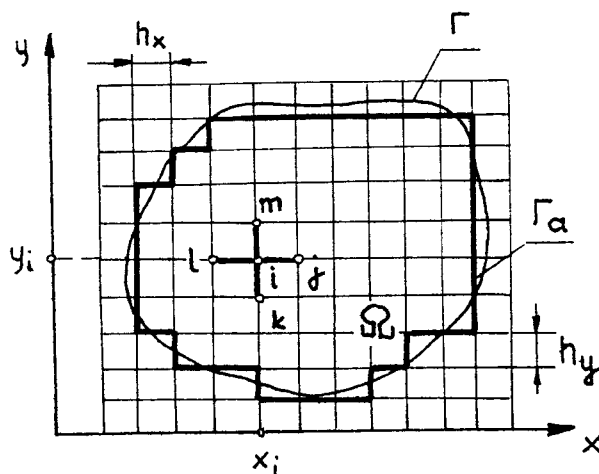


Bild 4.2. Rechteckiges Gitter des Lösungsgebietes

Als Ergebnis der Umformung der Dgl. (4.27) entsteht das System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung (mit Ableitungen der Veränderlichen t). Die linke Seite einer i -ten Gleichung bildet eine Linearkombination von $u_n(t) = U(x_n, y_n, t)$, mit $n = i, j, k, l, m$. Die rechte Seite wird durch die Beziehung

$$w_2(x_i, y_i) \frac{du_i}{dt} - w_3(x_i, y_i, t) \quad (4.35)$$

bestimmt. Bei Anwendung von (4.30) entsteht ein System von linearen algebraischen Gleichungen. Dieses System wird zur Reduktion der Werte von U in den Randknoten aus dem o.g. Differen-

tialgleichungssystem verwendet. Bei einem komplizierten Rand Γ , wird dieser durch eine treppenförmige oder polygonale Randkurve Γ_a approximiert. Die Randbedingung wird dann durch ein Interpolations- bzw. Extrapolationsverfahren berücksichtigt [27].

Anschließend ergibt sich ein Differentialgleichungssystem

$$[H]\{u\} + [C]\{\dot{u}\} + \{F\} = 0, \quad (4.36)$$

wobei $\{\dot{u}\} = d\{u\}/dt$, $[H]$ eine Bandmatrix, $[C]$ eine Diagonalmatrix, mit $c_{ij} = -\delta_{ij} w_2(x_i, y_i)$ bezeichnet. Der Spaltenvektor $\{F\}$ berücksichtigt das Vorhandensein von Erregerfunktionen. Die Lösung des Differentialgleichungssystems (4.36) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\{u_0\}$, wobei $u_{i0} = U_0(P_i)$, bildet die Näherungslösung des Anfangs-Randwertproblems (4.1-4.4) in bestimmten Gitterknoten.

4.2.4. Lösungsweg bei offenen Feldgebieten

Die dargestellten Verfahren, die die räumliche Lösung von partiellen Differentialgleichungen gestatten, sind nur bei räumlich begrenzten Gebieten anwendbar. Bei vielen Aufgaben der Elektrotechnik ist es aber notwendig räumlich offene Feldgebiete des elektromagnetischen Feldes zu berücksichtigen. Für die Näherungslösung zwei- und dreidimensionaler Felder im unbegrenzten Raum wird oft der Außenraum der Anordnung durch eine Fläche mit eingprägten Randbedingungen (z.B. das Vektorpotential ist gleich Null) begrenzt. Bei der Auswertung erhebt sich aber die Frage, wie weit entfernt soll diese zusätzlich eingeführte Grenzfläche angenommen werden [75]. Ein anderes Lösungskonzept besteht darin, daß der betrachtete Raum mit einer künstlich eingeführten Fläche in zwei Räume geteilt wird. In dem durch diese Fläche begrenzten Innenraum wird eine der numerischen Methoden zur Lösung von Randwertaufgaben, z.B. die Methode der finiten Elemente angewandt. Im Außenraum, in dem das gesuchte Feld die Laplace-Differentialgleichung erfüllt, wendet man eine andere Methode, z.B. die Integralgleichungsmethode [66], die Boundary Element Methode (BEM) [5,81,82] oder sogar die analytische Methode der Trennung der Variablen [58] an. Im weiteren wird die von Pissanetzky [74] vorgeschlagene Methode der infiniten Ele-

mente besprochen.

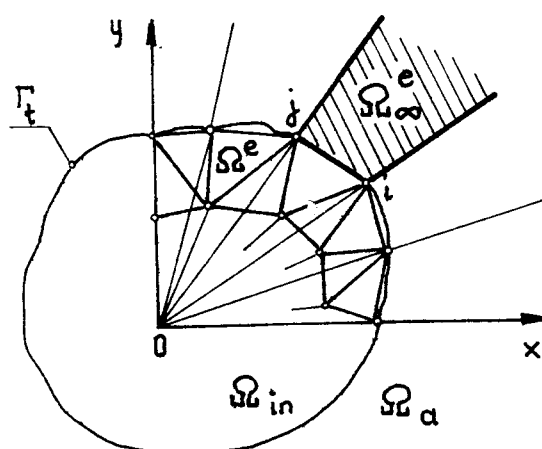


Bild. 4.3. Unterteilung des Innenraumes in finite Elemente Ω_e und des Außenraumes in infinite Elemente Ω_∞

Diese Methode gründet sich auf ähnlichen Prinzipien wie die Methode der finiten Elemente. Der Innenraum Ω_{in} wird in finite Elemente geteilt (Bild 4.3), wobei entsprechende Matrizen $[H]^e$, $[C]^e$ und der Vektor $\{F\}^e$ des Elementegleichungssystems wie im Abschnitt 4.2.2 konstruiert werden. Den Außenraum Ω_a teilt man dagegen in infinite, zweiknotige Elemente Ω_∞^e mit den Elementeknoten i und j , die an der Trennkurve Γ_t liegen. Vorausgesetzt wird, daß Ω_a ein quellenfreies nichtleitendes Gebiet (z.B. Luft) ist, in dem die gesuchte Funktion U die Laplace-Gleichung erfüllt.

Für das im Bild 4.4 dargestellte infinite Element werden folgende Formfunktionen angenommen [74]

$$\{N_\infty(P)\} = \begin{Bmatrix} N_{i\infty}(P) \\ N_{j\infty}(P) \end{Bmatrix} = \frac{f(\rho)}{2f(d/\cos\phi)} \begin{Bmatrix} 1 - \eta \\ 1 + \eta \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{d^n}{2u^n} \begin{Bmatrix} 1 + \frac{b}{l} - \frac{vd}{ul} \\ 1 - \frac{b}{l} + \frac{vd}{ul} \end{Bmatrix}, \quad (4.37)$$

wobei ρ und ϕ die Koordinaten des Polarkoordinatensystems sind. Die Funktion $f(\rho) = 1/\rho^n$, mit $n \geq 1$ charakterisiert das Verschwinden der gesuchten Funktion bei $\rho \rightarrow \infty$. Die sonstigen Parameter, die in der Gl. (4.37) auftreten, sind im Bild 4.4 erläutert und

aus den folgenden Beziehungen zu bestimmen:

$$l = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]^{1/2} / 2,$$

$$d = (x_i y_j - x_j y_i) / (21) ,$$

$$b = (x_j^2 - x_i^2 + y_j^2 - y_i^2) / (4l) ,$$

$$\rho_m = (d^2 + b^2)^{1/2}.$$

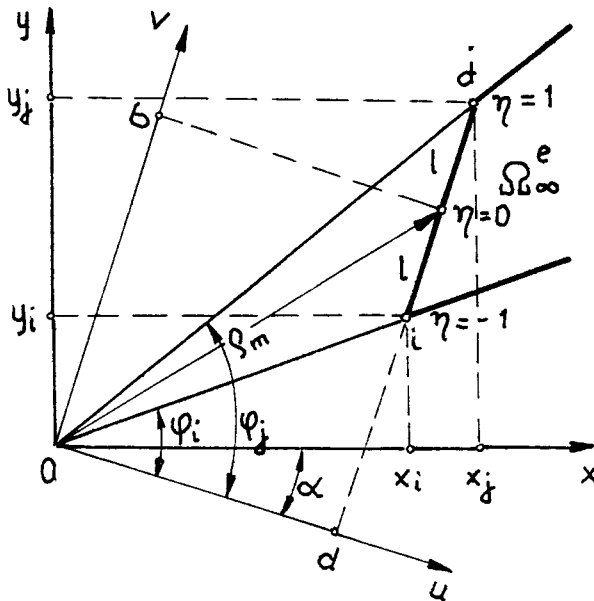


Bild 4.4. Das infinite Element

Die Koeffizienten der "Steifigkeitsmatrix" $[H]^{\infty}$ sind durch die Beziehung

$$h_{ij}^{\infty} = \int_{\Omega_{\infty}^E} w_1 \text{grad } N_{i\infty} \cdot \text{grad } N_{j\infty} d\Omega \quad (4.38)$$

gegeben.

Bei ebenen Problemen (Koordinatensystem x,y) ergibt sich nach der Integration [74]:

$$h_{ii}^{\infty} = a[(4n^2 + 2n + 1)1 - 6nb + 3\rho_m^2/1] , \quad (4.39)$$

$$h_{ij}^{\infty} = h_{ji}^{\infty} = a[(2n^2 - 2n - 1)l - 3\rho_m^2/l], \quad (4.40)$$

$$h_{jj}^{\infty} = a[(4n^2 + 2n + 1)l + 6nb + 3\rho_m^2/l], \quad (4.41)$$

mit $a = w_1 / (12nd)$.

Bei einer axialsymmetrischen Aufgabe (Koordinatensystem r, z) erhält man (Gramz und Ziolkowski [37]):

$$h_{ii}^{\infty} = b \{ [(nr_j + Cd)^2 + S^2 d^2] \ln \frac{r_j}{r_i} - 2Sl [n^2 (r_j + Sl) + 2n (r_j - Sb) - Sb + Cd] \} , \quad (4.42)$$

$$h_{ij}^{\infty} = h_{ji}^{\infty} = b \{ [-(nr_i + Cd)(nr_j + Cd) + S^2 d^2] \ln \frac{r_j}{r_i} + 2(n+1)Sl [(n-1)Sb + (n+1)Cd] \} , \quad (4.43)$$

$$h_{jj}^{\infty} = b \{ [(nr_i + Cd)^2 + S^2 d^2] \ln \frac{r_j}{r_i} - 2Sl [n^2 (r_i - Sl) + 2n (r_i - Sb) - Sb + Cd] \} , \quad (4.44)$$

mit $b = w_1 / [4(2n+1)dS^3 l^2]$, $S = (r_j - r_i) / (2l)$ und $C = (z_j - z_i) / (2l)$, wobei $S \neq 0$. Falls $S = 0$, werden die Elemente der Matrix $[H]^{\infty}$ aus den Gln (4.39-4.41) mit $a = w_1 / [6(2n+1)d^2]$ berechnet.

Die gewonnene Matrix $[H]^{\infty}$ wird analog wie $[H]^E$ im Bildungsprozess der Gesamtmatrix $[H]$ ausgenutzt. Dank dem Anteil von $[H]^{\infty}$ in der Matrix $[H]$ wird bei der Lösung der Differentialgleichung im Innenraum Ω_{in} das Vorhandensein des räumlich unbegrenzten Feldes im Außenraum Ω_a berücksichtigt.

4.3. Behandlung des Anfangswertproblems zur Bestimmung der Zeitlösung

Im Abschnitt 4.2 wurde die Anfangs-Randwertaufgabe (4.1-4.4) in bezug auf die räumliche Abhängigkeit der gesuchten Funktion $U(P, t)$ betrachtet. Dank der Anwendung von bestimmten Verfahren wurde die partielle parabolische Differentialgleichung (4.1) mit den zugehörigen Randbedingungen (4.2-4.3) durch die entsprechende Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzt. Die Lösung des Differentialgleichungssystems läßt sich in einer analytischen Form darstellen. Zum Beispiel gilt für das System (4.26)

$$\begin{aligned} \{u(t)\} &= \exp(-[C]^{-1} [H]t) \{u(0)\} - \\ &- \exp(-[C]^{-1} [H]t) \int_0^t \exp([C]^{-1} [H]\tau) [C]^{-1} \{F(\tau)\} d\tau . \end{aligned} \quad (4.45)$$

Die Beziehung (4.45) kann man leider nur in wenigen Fällen anwenden, so daß bei der praktischen Berechnung die Anfangswertaufgabe mit Hilfe von Zeitdiskretisierungsverfahren, z.B. linearen Mehrschrittverfahren [78] behandelt werden muß. In der Literatur [1,4,48,55,97] wird oft ein spezielles Einschrittverfahren, die sogenannte θ -Methode, angewandt.

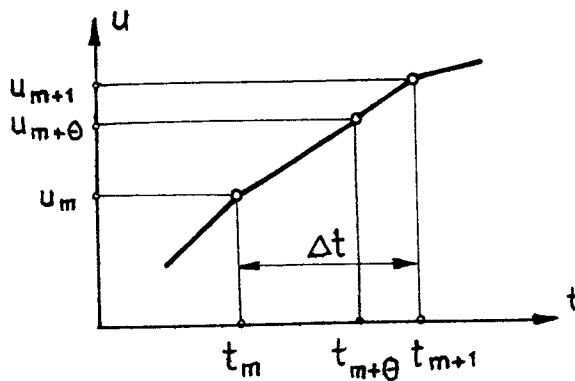


Bild 4.5. Linearapproximation im Zeitintervall $\langle t_m, t_{m+1} \rangle$

Bei dieser Methode wird das betrachtete Zeitintervall $\langle 0, T \rangle$ in M Zeitabschnitte $\langle t_m, t_{m+1} \rangle$ mit einer Schrittweite $\Delta t = T/M$ geteilt. Jedem Zeitpunkt $t_m = m\Delta t$ wird die Lösung $\{u^m\} = \{u(t_m)\}$ des Differentialgleichungssystems (4.26) zugeordnet. Im Zeitintervall $\langle t_m, t_{m+1} \rangle$ wird der gesuchte Vektor $\{u(t)\}$ mit Hilfe des Linearansatzes (Bild 4.5)

$$\{u^{m+\theta}\} = \theta \{u^{m+1}\} + (1-\theta)\{u^m\} \quad (4.46)$$

approximiert, wobei $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$. Auf ähnliche Weise soll auch der Erregervektor $\{F(t)\}$ approximiert werden. Die Ableitung $\{\dot{u}(t)\}$ wird durch ihren Differenzenquotient

$$\left. \frac{d\{u\}}{dt} \right|_{m+\theta} \approx \frac{\{u^{m+\theta}\} - \{u^m\}}{\theta \Delta t} = \frac{\{u^{m+1}\} - \{u^m\}}{\Delta t} \quad (4.47)$$

ersetzt. Unter Berücksichtigung der Gln (4.46–4.47) ergibt sich aus (4.26)

$$\begin{aligned} (\theta[H] + \frac{1}{\Delta t} [C])\{u^{m+1}\} + \left[(1-\theta)[H] - \frac{1}{\Delta t} [C] \right]\{u^m\} + \\ + \theta\{F^{m+1}\} + (1-\theta)\{F^m\} = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Bedeutet $\{\alpha^m\}\Delta t$ ein Funktionszuwachs, d.h.

$$\{u^{m+1}\} = \{u^m\} + \{\alpha^m\}\Delta t, \quad (4.49)$$

so erhält man aus Gl.(4.48) folgende Beziehung

$$\{\theta[H]\Delta t + [C]\}\{\alpha^m\} + [H]\{u^m\} + \theta\{F^{m+1}\} + (1-\theta)\{F^m\} = 0. \quad (4.50)$$

Das Gleichungssystem (4.50) gestattet, den Hilfsvektor $\{\alpha^m\}$ zu gewinnen und schließlich aus der Gl.(4.49) die gesuchte Funktion $\{u(t)\}$ im Zeitpunkt t_{m+1} zu berechnen. Der Anfangsvektor $\{u^0\} = \{u(0)\}$ ist durch die Anfangsbedingung (4.4) bestimmt, d.h. $\{u^0\} = \{U_0(P_i)\}$.

Um die absolute Stabilität der numerischen Lösung mit Hilfe der θ -Methode gewährleisten zu können, soll der Parameter θ die Bedingung $\theta \in \langle 1/2, 1 \rangle$ erfüllen. In besonderen Fällen, wenn $\theta = 1/2$; $2/3$; 1 ist, erhält man entsprechend: das Verfahren von Crank-Nicolson, von Galerkin, sowie die implizite Methode von Euler.

5. NUMERISCHE BESTIMMUNG DER MITTLEREN ZEITKONSTANTE

5.1. Allgemeines

Die im Abschnitt 3.4 dargestellte mittlere Zeitkonstante wurde als bequemer, die Dauer von aperiodischen Ausgleichsvorgängen bestimmender Zeitparameter in vielen Arbeiten ausgenutzt. Mit ihrer Hilfe wurde von *Auramescu* [2] die Diffusion des elektromagnetischen und Temperaturfeldes in geometrisch einfachen, leitenden Gebieten untersucht. In der Arbeit [43] haben *Hortopan* und *Hortopan* Messwiderstände im Übergangszustand analysiert. Der Zeitkonstanten des Skineffektes wurden die Arbeiten [67,68] von *Mocanu* gewidmet. Im Beitrag [69] untersuchte *Mocanu* die nichtstationäre Stromverdrängung in einer Maschinennut von rechteckigem Querschnitt. Nach *Kirtley* und *Furuyama* [46], sowie *Miller* und *Hughes* [65] stellt die mittlere Zeitkonstante ein Parameter dar, der von der Qualität des Abschirmsystems beim Rotor einer Synchronmaschine zeugt. Die mittlere Zeitkonstante bildete ein Thema zahlreicher Beiträge von *Lipiński* (z.B. [57-60,88]), in denen nichtstationäre elektromagnetische Prozesse in bestimmten räumlich begrenzten und unbegrenzten Anordnungen betrachtet wurden. In der Monographie [56] analysierte *Lipiński* das Eindringen des elektromagnetischen Feldes u.a. in die leitende, unendlich ausgedehnte Platte, in die Hohl- und Massivkugel, sowie in den Hohl- und Massivzylinder bei verschiedener Gestalt und Lage des Induktors. Untersucht wurden ebenfalls elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in einer rechteckigen und einer kreisförmigen Nut einer Asynchronmaschine, in einer Kreisscheibe und in einer Flußführung mit rechteckigem Querschnitt.

In den oben angegebenen Arbeiten wurde die zur Analyse des dynamischen Verhaltens verwandte mittlere Zeitkonstante analytisch bestimmt. Auf die betrachtete Diffusionsgleichung wurde zuerst die Laplace-Transformation angewandt. Die Transformierte der gesuchten Funktion wurde dann mit Hilfe eines analytischen Verfahrens zur Lösung von Randwertaufgaben berechnet. Bei räumlich begrenzten Anordnungen wurde die Methode der Variablentrennung [2,56,67,68,88] und für räumlich unbegrenzte Anordnungen die Me-

thode der Integraltransformationen, z.B. die Transformation von Fourier, Bessel und Mellin [56,59,60] angewandt. In der Arbeit [77] von *Purczyński* und *Brykalski* wurde dagegen das nichtstationäre Problem mit Hilfe des direkten Verfahrens von Kantorowitsch gelöst. Weil in diesen Arbeiten als Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe nicht der Zeitverlauf, sondern seine Laplace-Transformierte gefunden wurde, wurde zur Bestimmung der Zeitkonstanten statt der Gl.(3.18) die äquivalente Beziehung

$$\tau(P) = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [sU^*(P,s)]}{U(P,0) - U(P,\infty)} \quad (5.1)$$

angewandt, wobei $U^*(P,s)$ die Laplace-Transformierte von $U(P,t)$, d.h. $U^*(P,s) = \mathcal{L}[U(P,t)]$ bedeutet.

Die analytischen Methoden sind, wie die Berechnungspraxis beweist, nur für die Fälle einer einfachen Gestalt des Lösungsbereiches geeignet. Bei den praktischen Problemen der Technik begegnet man oft Aufgaben, deren analytische Lösung entweder nicht gefunden werden kann, oder so kompliziert ist, daß sie für eine ingenieurmäßige Behandlung von technischen Problemen kaum nützlich ist. In diesen Fällen muß die numerische Berechnungstechnik angewandt werden.

In dem bisherigen Schrifttum hat der Verfasser keine wissenschaftlichen Arbeiten gefunden, in denen das Problem der numerischen Bestimmung der Zeitkonstante gelöst wurde. Eine gewisse Ausnahme bildet die Arbeit [57] von *Lipinski*, in der das Abschirmverhalten in einer durch hochpermeable und leitende Wände begrenzten zylindersymmetrischen Anordnung betrachtet wurde. Die Verteilung des Vektorpotentials wurde durch eine einzige Beziehung im ganzen leitenden und nichtleitenden Raum beschrieben und zur Berechnung dieser die Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art mit degeneriertem Kern verwendet. Die Lösung der Integralgleichung wurde in Form eines linearen Gleichungssystems dargestellt. Die aus dem Gleichungssystem gewonnenen Koeffizienten gestatteten schließlich, die mittlere Zeitkonstante der magnetischen Induktion innerhalb der Abschirmung zu berechnen.

In diesem Kapitel werden neue Algorithmen vorgeschlagen, welche die analytisch-numerische, sowie "rein" numerische Auswer-

tung der mittleren Zeitkonstanten und des betrachteten Feldes im Anfangs- und Endzustand gestatten. Als Hilfsmittel werden bekannte und softwaremäßig aufbereitete Verfahren zur Lösung von stationären Randwertaufgaben adaptiert. Die Algorithmen werden anhand von Berechnungsbeispielen erläutert. Der Verfasser hat sich auf die Darstellung einiger relativ einfacher (u.a. auch eindimensionaler) Probleme, für welche die analytische Lösung vorhanden ist entschieden. Auf Grund dieser "akademischen" Beispiele können die Richtigkeit der gewonnenen Ergebnisse, die Wirksamkeit und insbesondere die Konvergenz der numerischen Lösung nachgeprüft werden.

Der Inhalt des Kapitels wurde teilweise in den früheren Arbeiten [12-15,20-21] des Verfassers veröffentlicht, in denen mit Hilfe der vorgeschlagenen Algorithmen auch andere Anwendungen (Berechnung des Übergangsverhaltens spezieller Feldprobleme) analysiert wurden.

5.2. Anwendung des Galerkinschen Verfahrens

5.2.1. Allgemeines Lösungskonzept

Bei linearen, nichtstationären Feldproblemen ist die mittlere Zeitkonstante des Ausgleichsvorgangs vom Zeitverlauf der Erregung unabhängig, d.h. man kann zur Bestimmung der Zeitkonstante eine beliebige Systemantwort, insbesondere die Sprungantwort (Übergangsfunktion) ausnutzen.

Setzt man die sprunghafte Änderung eines der Erregervorgänge (siehe Abschnitt 4.1) voraus

$$\begin{aligned} U_{\Gamma}(P,t) &= 1(t) \cdot U_{\Gamma}(P) , \\ w_g(P,t) &= 1(t) \cdot w_g(P) , \\ w_s(P,t) &= 1(t) \cdot w_s(P) , \end{aligned} \tag{5.2}$$

wobei $1(t)$ eine Einheitssprungfunktion darstellt, so erhält man nach der Anwendung der zweiseitigen Laplace-Transformation das Differentialgleichungssystem (4.10) in folgender Operatorenform

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \psi_j^* \left(\int_{\Omega} w_1 \operatorname{grad} \phi_i \cdot \operatorname{grad} \phi_j d\Omega + \int_{\Gamma_2} w_4 \phi_i \phi_j d\Gamma \right) + s \sum_{j=1}^n \psi_j^* \int_{\Omega} w_2 \phi_i \phi_j d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} \left(\frac{w_3}{s} - w_2 \phi_0 \right) \phi_i - \frac{w_1}{s} \operatorname{grad} \phi_0 \cdot \operatorname{grad} \phi_i d\Omega - \frac{1}{s} \int_{\Gamma_2} (w_4 \phi_0 + w_5) \phi_i d\Gamma + \\
& \quad + \sum_{j=1}^n \psi_{j0} \int_{\Omega} w_2 \phi_i \phi_j d\Omega, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5.3)
\end{aligned}$$

mit $\psi_{j0} = \psi_j(0)$. Das System (5.3) läßt sich in Matrixschreibweise wie folgt darstellen

$$([A] + s[C])\{\Psi^*(s)\} = \frac{1}{s} (\{B\} + s\{D\}), \quad (5.4)$$

wobei

$$a_{ij} = \int_{\Omega} w_1 \operatorname{grad} \phi_i \cdot \operatorname{grad} \phi_j d\Omega + \int_{\Gamma_2} w_4 \phi_i \phi_j d\Gamma, \quad (5.5)$$

$$c_{ij} = \int_{\Omega} w_2 \phi_i \phi_j d\Omega, \quad (5.6)$$

$$b_i = \int_{\Omega} (w_3 \phi_i - w_1 \operatorname{grad} \phi_0 \cdot \operatorname{grad} \phi_i) d\Omega - \int_{\Gamma_2} (w_4 \phi_0 + w_5) \phi_i d\Gamma, \quad (5.7)$$

$$d_i = \sum_{j=1}^n \psi_{j0} \int_{\Omega} w_2 \phi_i \phi_j d\Omega - \int_{\Omega} w_2 \phi_0 \phi_i d\Omega \quad (5.8)$$

und $\{\Psi^*(s)\} = \mathcal{L}[\{\Psi(t)\}]$ ist.

Aus den Gl'n (4.14) und (5.8) folgt die Gestalt der Wichtungsfunktion $w(P)$. Nimmt man $w(P) = w_2(P)$ an, so geht die Gl. (5.8) in die folgende Gleichung über

$$d_i = \int_{\Omega} w_2 [U_0(P) - \phi_0(P)] \phi_i d\Omega. \quad (5.9)$$

Um die mittlere Zeitkonstante der Funktion $U(P, t)$ gewinnen zu können, ist es vorteilhaft, den Ausdruck (5.1) auszunutzen. Nach Einsetzen der Näherungslösung (4.5) in die Gl. (5.1), ergibt sich

$$\tau(P) = \frac{\langle \{\Phi(P)\}, \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s\{\Psi^*(s)\}] \rangle}{U_0(P) - \phi_0(P) - \langle \{\Phi(P)\}, \{\Psi(t \rightarrow \infty)\} \rangle}, \quad (5.10)$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt der n -dimensionalen Vektoren, z.B. $\langle \{\Phi\}, \{\Psi\} \rangle = \sum_{i=1}^n \phi_i \psi_i$ symbolisiert.

Die Lösung des Systems (5.4) kann man folgendermaßen darstellen

$$\{\Psi^*(s)\} = \frac{1}{s} ([A] + s[C])^{-1} (\{B\} + s\{D\}) . \quad (5.11)$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\{\Psi(t \rightarrow \infty)\} = \lim_{s \rightarrow 0} [s\{\Psi^*(s)\}] = [A]^{-1} \{B\} \quad (5.12)$$

und

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s\{\Psi^*(s)\}] = [A]^{-1} (\{D\} - [C][A]^{-1} \{B\}) . \quad (5.13)$$

B e w e i s der Beziehung (5.13):

Die in der Gl. (5.13) auftretende Ableitung läßt sich wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [s\{\Psi^*(s)\}] &= \\ &= \left[([A] + s[C])^{-1} (\{B\} + s\{D\}) \right]' \\ &= \left[([A] + s[C])^{-1} \right]' (\{B\} + s\{D\}) + ([A] + s[C])^{-1} (\{B\} + s\{D\})' \\ &= ([A] + s[C])^{-1} [-[C]([A] + s[C])^{-1} (\{B\} + s\{D\}) + \{D\}] . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Bei der Matrixdifferentiation wurden die im Anhang A angegebenen Beziehungen (A2-A5) ausgenutzt. Mit dem Grenzübergang $s \rightarrow 0$ erhält man aus (5.14) die Gl. (5.13).

Schließlich erhält man die Beziehung, die in einfacher Weise die Berechnung der mittleren Zeitkonstanten des Vorgangs $U(P, t)$ gestattet

$$\tau(P) = \frac{\langle \{\Phi(P)\}, [A]^{-1} (\{D\} - [C][A]^{-1} \{B\}) \rangle}{U_0(P) - \phi_0(P) - \langle \{\Phi(P)\}, [A]^{-1} \{B\} \rangle} . \quad (5.15)$$

Man kann beweisen, daß wenn die Funktionenfolge $\{\phi_i(P)\}_{i=1}^n$ ein linear unabhängiges System bildet, ist $[A]$ eine reguläre Matrix. Durch entsprechende Umformungen, die den Rang der Matrix beibehalten, kann man $[A]$ (ebenso wie $[C]$) auf die Grammsche Matrix zurückführen. Die Matrix $[A]$ besitzt somit eine inverse Matrix $[A]^{-1}$.

Die gewonnene Abhängigkeit (5.15) bildet eine Verallgemeinerung der in der Arbeit [20] von Brykalski und Krasoń angegebenen Beziehung (15). Setzt man voraus, daß die Funktion $U(P, t)$ auf dem Rand Γ nur die Dirichletsche Randbedingung $U(P, t) = 1(t)U_\Gamma$, sowie die homogene Anfangsbedingung erfüllt, und daß keine inne-

ren Quellen vorhanden sind, so ergibt sich aus der Gl. (5.15)

$$\tau(P) = - \langle \{\Phi(P)\}, [A]^{-1} \{D\} \rangle / U_{\Gamma}, \quad (5.16)$$

wobei aus Gl. (5.8) folgt

$$d_i = -U_{\Gamma} \int_{\Omega} w_2 \phi_i d\Omega. \quad (5.17)$$

Die Beziehungen (5.16) und (15) in Arbeit [20] sind äquivalent.

5.2.2. Berechnungsbeispiele

Beispiel 1: Zeitkonstante des Wärmefeldes in einer ebenen Platte

Eine ebene Platte der Dicke a (Bild 5.1) wird mit dem durch die eine Oberfläche bei $x=0$ eindringenden konstanten Wärmefluß q erwärmt, während auf der anderen Oberfläche ($x=a$) der Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet. Die Außentemperatur sowie die Temperatur der Umgebung wird als Null angenommen. Vorausgesetzt wird, daß alle Stoffwerte: die Wärmeleitfähigkeit (λ), die spezifische Wärme (c_p), die Dichte (ρ) und der Wärmeübertragungskoeffizient (α) einen konstanten Wert aufweisen.

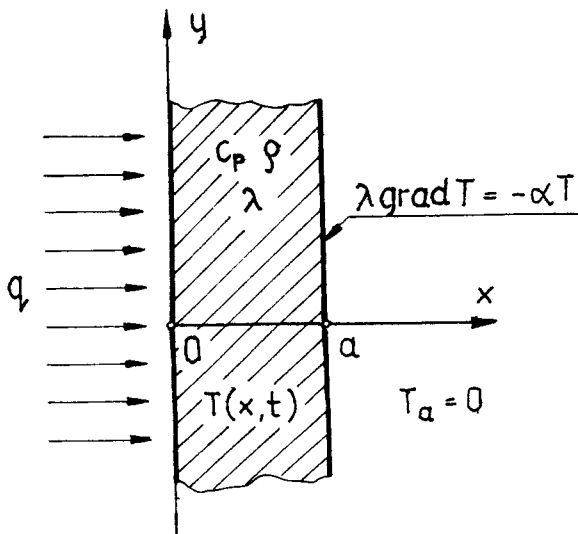


Bild 5.1. Erwärmung der unendlich ausgedehnten Platte durch einen Wärmefluß q

Die Differentialgleichung für den betrachteten Fall lautet

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \text{für } t \geq 0, 0 \leq x \leq a, \quad (5.18)$$

wobei $\kappa = \lambda / (c_p \rho)$ - die Temperaturleitzahl bedeutet. Das Temperaturfeld $T(x,t)$ erfüllt für $t \geq 0$ die "gemischte" Randbedingung

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{q}{\lambda} = 0, \quad \text{für } x = 0, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\alpha}{\lambda} T = 0, \quad \text{für } x = a. \quad (5.20)$$

Analytische Lösung

Die mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen gewonnene Lösung des Randwertproblems (5.18-5.20) kann man in folgender Form darstellen

$$T(x, t) = \frac{qa}{\lambda} \left(\frac{1}{Bi} + 1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{2qa}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_i \frac{x}{a}) \exp\left(-\gamma_i^2 \frac{\kappa t}{a^2}\right)}{\gamma_i^2 \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_i}{2\gamma_i}\right)}, \quad (5.21)$$

wobei γ_i die aufeinanderfolgenden positiven Wurzeln der Gleichung $\gamma \operatorname{tg} \gamma = Bi$ und $Bi = \alpha a / \lambda$ die Biot-Zahl sind.

Aus der Beziehung (3.18) folgt die mittlere Zeitkonstante des Verlaufs (5.21)

$$\tau(x) = \frac{2a^2}{\kappa \left(\frac{1}{Bi} + 1 - \frac{x}{a} \right)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_i \frac{x}{a})}{\gamma_i^4 \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_i}{2\gamma_i}\right)}, \quad (5.22)$$

Numerische Lösung

Zur Lösung des Randwertproblems mit Hilfe des Galerkinschen Verfahrens werden die Koordinatenfunktionen ϕ_i in folgender Gestalt angenommen

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{i-1}, & i > 1 \end{cases} \quad (5.23)$$

Die Elemente der entsprechenden Matrizen lassen sich nach den Gln (5.5-5.9) berechnen

$$a_{ij} = \frac{Bi}{a} + \frac{1}{a} \cdot \begin{cases} 0, & i+j \leq 3 \\ \frac{(i-1)(j-1)}{i+j-3}, & i+j > 3 \end{cases} \quad (5.24)$$

$$c_{ij} = \frac{a}{\kappa} \frac{1}{i+j-1} \quad (5.25)$$

$$b_i = \begin{cases} q \\ \lambda \end{cases}, \quad i = 1 \quad (5.26)$$

$$d_i = 0. \quad (5.27)$$

In Anlehnung an die Gl'n (5.15) und (5.24-5.27) wurden numerische Auswertungen durchgeführt und die gewonnenen Ergebnisse mit der exakten Lösung (5.22) verglichen. In der Tabelle 5.1 werden die Ergebnisse der folgenden Näherungen ($n=2,3,4,5$) der normierten Zeitkonstante $\tau' = \tau\alpha/a^2$ zusammengestellt. Die angegebenen Werte zeugen von der Konvergenz der vorgeschlagenen Methode. Für $n=6$ war der relative Fehler kleiner als 10^{-6} .

Tabelle 5.1. Ergebnisse der numerischen Berechnung der normierten Zeitkonstante τ' in einer ebenen Platte

Bi	n	x/a				
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
1	2	1.1667	1.2143	1.2778	1.3667	1.5000
	3	1.1667	1.2946	1.4028	1.4792	1.5000
	4	1.1667	1.2991	1.4028	1.4729	1.5000
	5	1.1667	1.2991	1.4028	1.4729	1.5000
	<i>genau</i>	1.1667	1.2991	1.4028	1.4729	1.5000
5	2	.47778	.48947	.50952	.55185	.70000
	3	.47778	.55855	.63452	.69769	.70000
	4	.47778	.56678	.63452	.68032	.70000
	5	.47778	.56678	.63452	.68032	.70000
	<i>genau</i>	.47778	.56678	.63452	.68032	.70000
10	2	.40303	.40882	.41944	.44524	.60000
	3	.40303	.47500	.54444	.60595	.60000
	4	.40303	.48419	.54444	.58363	.60000
	5	.40303	.48419	.54444	.58363	.60000
	<i>genau</i>	.40303	.48419	.54444	.58363	.60000

Beispiel 2: Zeitkonstante des Wärmefeldes in einem unendlich langen Kreiszylinder

Ein unendlich langer Kreiszylinder mit dem Radius R (Bild 5.2) wird durch innere Wärmequellen konstanter Leistungsdichte q_v erwärmt, während auf der Außenfläche der Wärmeaustausch mit der

Umgebung auftritt. Die Anfangstemperatur sowie die Temperatur der Umgebung ist gleich Null. Vorausgesetzt wird, daß alle Stoffwerte: die Wärmeleitfähigkeit (λ), die spezifische Wärme (c_p), die Dichte (ρ) und der Wärmeübertragungskoeffizient (α) einen konstanten Wert aufweisen.

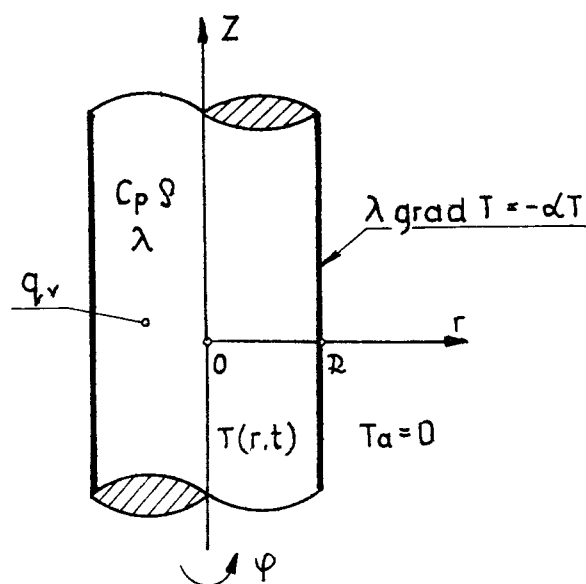


Bild 5.2. Erwärmung des unendlich langen Kreiszylinders durch innere Wärmequellen konstanter Leistungsdichte q_v

Das nichtstationäre Temperaturfeld $T(r,t)$ erfüllt in diesem Beispiel die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{q_v}{\lambda}, \quad \text{für } t \geq 0, 0 \leq r \leq R, \quad (5.28)$$

mit $\kappa = \lambda / (c_p \rho)$, die homogene Anfangsbedingung und für $t \geq 0$ gemäß dem Newtonschen Gesetz folgende Randbedingung

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\alpha}{\lambda} T = 0, \quad \text{für } r = R. \quad (5.29)$$

Analytische Lösung

Die Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe (5.28-5.29) kann man mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen gewinnen. Der nichtstationäre Temperaturverlauf läßt sich wie folgt darstellen

$$T(r,t) = \frac{q_v R^2}{4\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{Bi} \right) - \frac{2q_v R^2 Bi}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \frac{r}{R}) \exp\left[-\gamma_i^2 \frac{\kappa t}{R^2}\right]}{\gamma_i^2 (Bi^2 + \gamma_i^2) J_0(\gamma_i)}, \quad (5.30)$$

wobei γ_i die aufeinanderfolgenden positiven Wurzeln der Gleichung

chung $Bi \cdot J_0(\gamma) = \gamma J_1(\gamma)$; $J_0(\gamma), J_1(\gamma)$ - die Bessel-Funktionen und $Bi = \alpha R / \lambda$ die Biot-Zahl bedeuten.

Die mittlere Zeitkonstante des Verlaufs (5.30) lautet

$$\tau(r) = \frac{8R^2 Bi}{\pi \left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{Bi}\right)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_i \frac{r}{R})}{\gamma_i^4 (Bi^2 + \gamma_i^2) J_0(\gamma_i)} . \quad (5.31)$$

Numerische Lösung

Werden die Koordinatenfunktionen wie folgt angenommen

$$\phi_i(r) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ \left(\frac{r}{R}\right)^{i-1}, & i > 1 \end{cases} \quad (5.32)$$

so erhält man aus den Gl'n (5.5-5.9) die Matrixkoeffizienten

$$a_{ij} = Bi + \begin{cases} 0, & i+j = 2 \\ \frac{(i-1)(j-1)}{i+j-2}, & i+j > 2 \end{cases} \quad (5.33)$$

$$c_{ij} = \frac{R^2}{\pi} \frac{1}{i+j}, \quad (5.34)$$

$$b_i = \frac{R^2 q_v}{\lambda} \frac{1}{i+1}, \quad (5.35)$$

$$d_i = 0. \quad (5.36)$$

Die Ergebnisse der numerischen Auswertungen der normierten Zeitkonstante $\tau' = \tau \pi / R^2$ werden für $(n=2,3,4,5)$ in der Tabelle 5.2 dargestellt und mit den exakten Werten (Gl. (5.31)) verglichen. Bei $n = 6$ hatte die numerische Lösung einen relativen Fehler von 10^{-5} .

Tabelle 5.2. Ergebnisse der numerischen Berechnung der normierten Zeitkonstante τ' in einem unendlichen Kreiszylinder

Bi	n	r/R				
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
1	2	.63333	.62963	.62500	.61905	.61111
	3	.65000	.64255	.63636	.63077	.62500
	4	.64524	.64392	.63766	.62985	.62500
	5	.64583	.64370	.63778	.62991	.62500
	<i>genau</i>	.64584	.64370	.63778	.62991	.62500
5	2	.25385	.25079	.24583	.23636	.21111
	3	.27857	.26355	.25217	.24179	.22500
	4	.26837	.26656	.25528	.23913	.22500
	5	.26964	.26607	.25557	.23928	.22500
	<i>genau</i>	.26964	.26607	.25557	.23928	.22500
10	2	.20942	.20741	.20385	.19583	.16111
	3	.23750	.22033	.20790	.19706	.17500
	4	.22560	.22386	.21165	.19356	.17500
	5	.22708	.22329	.21201	.19377	.17500
	<i>genau</i>	.22708	.22329	.21201	.19377	.17500

* * *

Die in den Beispielen 1 und 2 gewonnenen Ergebnisse beweisen die Ortsabhängigkeit der mittleren Zeitkonstante (siehe Tabelle 5.1 bzw. 5.2). In der physikalischen Interpretation bedeutet diese Abhängigkeit die jeweilige Dauer des Ausgleichsvorgangs in bestimmten Punkten des untersuchten Gebietes. Zum Beispiel zeugt die Verteilung der Zeitkonstante in der durch einen Wärmefluß erwärmten Platte (Tabelle 5.1) von der Richtung der Ausbreitung des Temperaturfeldes: von der erwärmten Oberfläche $x=0$ (der kleinste Wert von τ') zur Oberfläche $x=a$ (der größte Wert von τ').

5.3. Anwendung der Methode der finiten Elemente

5.3.1. Allgemeines Lösungskonzept

Dank der finite Elemente- und bei offenen Feldproblemen auch der infinite Elemente-Formulierung wurde im Abschnitt 4.2.2 die Anfangs-Randwertaufgabe (4.1-4.4) auf die Lösung des resultie-

renden Gesamtdifferentialgleichungssystem (4.26) zurückgeführt. Um die Zeitkonstante des untersuchten Diffusionsvorgangs bestimmen zu können, soll die Funktion $U(P,t)$ als Sprungantwort betrachtet werden. Setzt man einen sprungförmigen Erregungsvorgang (siehe die Beziehungen (5.2)) voraus, so erhält man das Gleichungssystem (4.26) in folgender Operatorenform

$$[H]\{u^*\} + [C](s\{u^*\} - \{u\}_0) + \{F^*\} = 0, \quad (5.37)$$

wobei $\{u^*\}$ die Laplace-Transformierte des Vektors $\{u(t)\}$, d.h. $\{u^*\} = \mathcal{L}[\{u\}]$ bedeutet. Da der Vektor $\{F^*\}$ die Erregung vorstellt, ergibt sich unter Berücksichtigung der Voraussetzung (5.2)

$$\{F^*\} = s^{-1}\{F\}. \quad (5.38)$$

Die Lösung des Gleichungssystems (5.38) lautet:

$$\{u^*\} = s^{-1}([H] + s[C])^{-1}([C]s\{u\}_0 - \{F\}). \quad (5.39)$$

Daraus folgen weitere Beziehungen:

$$\{u(t \rightarrow 0)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} (s\{u^*\}) = [C]^{-1}[C]\{u\}_0 = \{u\}_0, \quad (5.40)$$

$$\{u(t \rightarrow \infty)\} = \lim_{s \rightarrow 0} (s\{u^*\}) = -[H]^{-1}\{F\} \quad (5.41)$$

und

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s\{u^*\}] = [H]^{-1}[C](\{u\}_0 - \{u\}_\infty). \quad (5.42)$$

B e w e i s der Beziehung (5.42):

Die in der Gl. (5.42) auftretende Ableitung kann man wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [s\{u^*\}] &= \frac{d}{ds} \left[([H] + s[C])^{-1} ([C]s\{u\}_0 - \{F\}) \right] \\ &= -([H] + s[C])^{-1} [C]([H] + s[C])^{-1} ([C]s\{u\}_0 - \{F\}) + \\ &\quad + ([H] + s[C])^{-1} [C]\{u\}_0 \\ &= ([H] + s[C])^{-1} [C] [\{u\}_0 - ([H] + s[C])^{-1} ([C]s\{u\}_0 - \{F\})] \end{aligned} \quad (5.43)$$

Bei der Matrixdifferentiation wurden die im Anhang A angegebenen Beziehungen (A2-A5) ausgenutzt. Unter Berücksichtigung der Gl. (5.39) ergibt sich schließlich

$$\frac{d}{ds} [s\{u^*\}] = ([H] + s[C])^{-1} [C](\{u\}_0 - s\{u^*\}) . \quad (5.44)$$

Mit dem Grenzübergang $s \rightarrow 0$ erhält man die Beziehung (5.42).

Aus den Gln (5.1) und (5.42) folgt die mittlere Zeitkonstante des nichtstationären Verlaufs $U(P,t)$ in den Elementeknoten

$$\tau_i = v_i / (u_{i0} - u_{i\infty}), \quad (5.45)$$

wobei v_i die Elemente des Hilfsvektors

$$\{v\} = [H]^{-1} [C](\{u\}_0 - \{u\}_\infty) \quad (5.46)$$

bedeuten und u_{i0} , $u_{i\infty}$ durch die Ausdrücke (5.40-5.41) gegeben sind.

Auf Grund der Gln (5.40-5.41) und (5.45-5.46) kann man den im Bild 5.3 dargestellten Algorithmus der numerischen Bestimmung der mittleren Zeitkonstante mit Hilfe des FE-Verfahrens konstruieren. Der Algorithmus besteht darin, daß man zwei Gleichungssysteme mit einer gemeinsamen Hauptmatrix (Steifigkeitsmatrix) $[H]$ lösen muß. Weil das erste System zur Bestimmung eines stationären Zustandes führt, kann die vorhandene Software für stationäre Randwertaufgaben ausgenutzt werden. Das zweite System, welches die Auswertung des Hilfsvektors $\{v\}$ gestattet, unterscheidet sich nur durch die Gestalt der rechten Seite. Um ihre Lösung zu bekommen, ist nur eine geringe Modifikation des Programms erforderlich.

Bei der Methode der finiten Elemente wird zur Lösung des Gesamtgleichungssystems oft die Gaussche Elimination verwendet [37,84,98], bei der sowohl der Vektor der rechten Seite als auch die Hauptmatrix gewissen Umformungen unterliegen. Da nach der Lösung des Gleichungssystems die in eine Dreiecksmatrix umgewandelte $[H]$ -Matrix nicht mehr gebraucht wird, kann der von ihr bisher eingenommene Speicherplatz für die Berechnung der Matrixkoeffizienten von $[C]$ benutzt werden. Nach der Auswertung von $\{F\} = [C](\{u\}_0 - \{u\}_\infty)$ kann man diesen Platz wieder für die Gestaltung der neuen Steifigkeitsmatrix $[H]$ verwenden. Das nach den angegebenen Regeln geschriebene Computerprogramm wird sich durch eine optimale und sparsame Speicherplatzverwaltung auszeichnen.

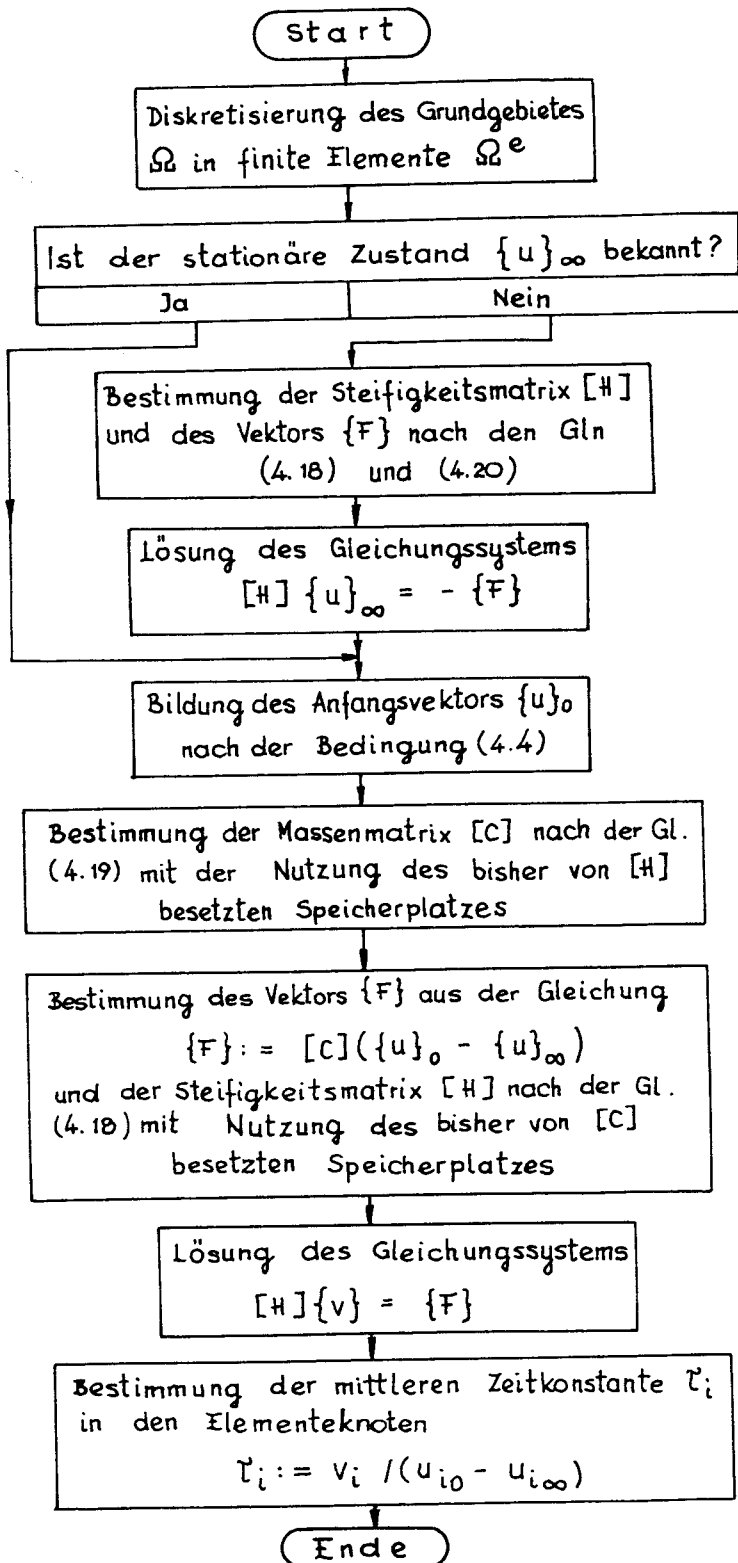


Bild 5.3. Blockdiagramm zum Algorithmus der Berechnung der mittleren Zeitkonstante mit Hilfe des FE-Verfahrens

5.3.2. Berechnungsbeispiele

Beispiel 3: Zeitkonstante eines Diffusionsvorgangs in einem homogenen, zylindrischen Stab endlicher Länge

Durch sprunghafte Erregung auf der Oberfläche eines homogenen zylindrischen Stabes mit dem Radius R und der Länge $l=2h$ wird im Inneren ein Diffusionsvorgang verursacht. Das nichtstationäre Skalarfeld $U(r,z,t)$, z.B. das Temperaturfeld, erfüllt im Gebiet: $0 \leq r \leq R$, $-h \leq z \leq h$ folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = D \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \text{für } t \geq 0, \quad (5.47)$$

wobei mit D der Diffusionskoeffizient bezeichnet wird, die homogene Anfangsbedingung und die Dirichletsche Randbedingung

$$U(R,z,t) = U(r,\pm h,t) = 1(t)U_F. \quad (5.48)$$

Analytische Lösung

Die exakte Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe wurde von Sikora und Lipiński in der Arbeit [88] angegeben. Der Ausgleichsvorgang kann man in Operatorenform darstellen

$$U^*(r,z,s) = \frac{1}{s} \left[\frac{\text{ch}(\sqrt{sD} \cdot z)}{\text{ch}(\sqrt{sD} \cdot h)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n sD}{hm\alpha_0^2} \frac{I_0(\alpha_0 r)}{I_0(\alpha_0 R)} \cos mz \right], \quad (5.49)$$

wobei $m=(2n+1)\pi/(2h)$ und $\alpha_0^2=m^2+sD$ sind. Die mittlere Zeitkonstante des Verlaufs (5.49) lautet

$$\tau(r,z) = D \left[\frac{h^2 - z^2}{2} - \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^3} \frac{I_0(mr)}{I_0(mR)} \cos mz \right], \quad (5.50)$$

wobei $I_0(\dots)$ die modifizierte Bessel-Funktion ist.

Numerische Lösung

Die Aufgabe wurde numerisch mit Hilfe des im Bild 5.3 dargestellten Algorithmus gelöst. Aus Symmetriegründen wurde das Gebiet: $0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq h$ betrachtet und in 520 lineare Dreieckselemente unterteilt. Die mittlere Zeitkonstante des Diffusionsvorgangs im Zylinder wurde in 294 Elementeknoten gefunden und mit der

exakten Lösung (5.50) verglichen. Zum Beispiel wurden in der Mitte der Anordnung die Ergebnisse der numerischen Rechnung mit einem relativen Fehler von 1,1 % gewonnen.

Beispiel 4: Zeitkonstante eines Diffusionsvorgangs in einem inhomogenen Zylinder endlicher Länge

Im vorigen Beispiel wurden homogene Eigenschaften des betrachteten Gebietes vorausgesetzt, d.h. alle Stoffwerte insbesondere der Diffusionskoeffizient D wurden konstant angenommen. Falls der Koeffizient D nicht konstant sondern ortsabhängig ist, stößt das Auffinden der analytischen Lösung der Gl. (5.47) auf Schwierigkeiten. Es wird im weiteren die Anfangs-Randwertaufgabe (5.47–5.48) unter der Voraussetzung betrachtet, daß sich der Koeffizient D gebietsweise ändert (Bild 5.4).

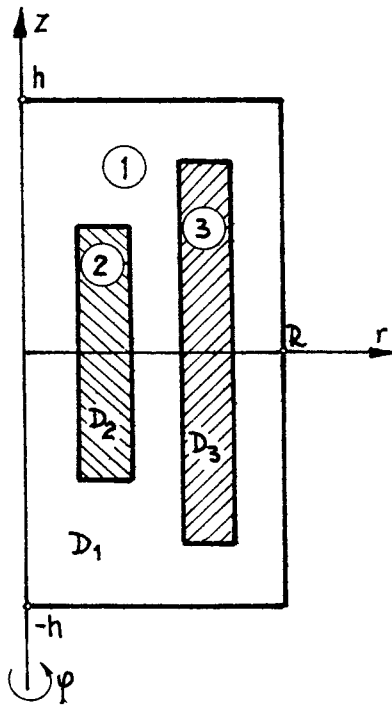


Bild 5.4. Zylindrischer Stab endlicher Länge mit inneren Gebieten

Numerische Lösung

Die numerischen Berechnungen wurden bei der Ortsdiskretisierung wie im Beispiel 3 (520 Dreieckselemente, 294 Knoten) unter Annahme verschiedener Werte von D durchgeführt. In den Bildern 5.5 und 5.6 wird die räumliche Verteilung der Linien $\tau = \text{const}$ der normierten Zeitkonstante $\tau' = \tau / (DR^2)$ im Inneren des Zylinders

ders dargestellt. Die Linien wurden mit dem Zuwachs von $\Delta\tau' = 0,01$ gezeichnet, wobei der Pfeil die Zunahmerichtung der Werte von τ' symbolisiert.

In den Bildern 5.6a-d werden Ergebnisse numerischer Berechnungen bei verschiedenen Werten von D präsentiert. Bei einem großen

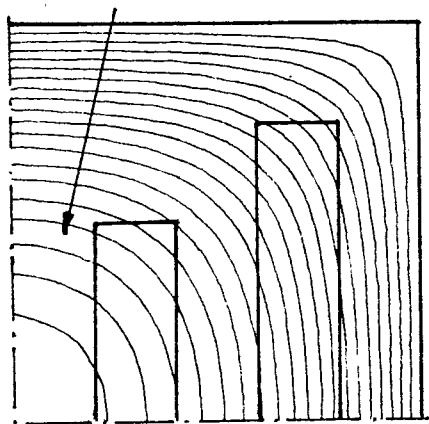


Bild 5.5. Verteilung der normierten Zeitkonstante τ' in einem homogenen Zylinder (vergleiche Beispiel 3) bei $R = h$

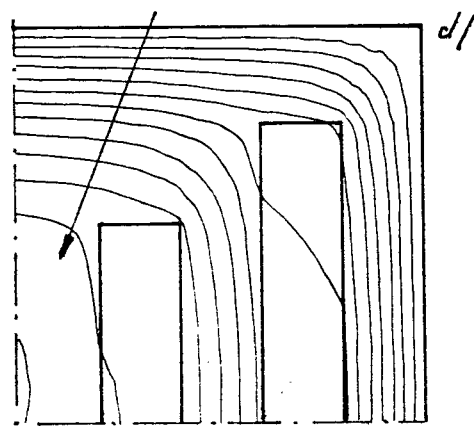
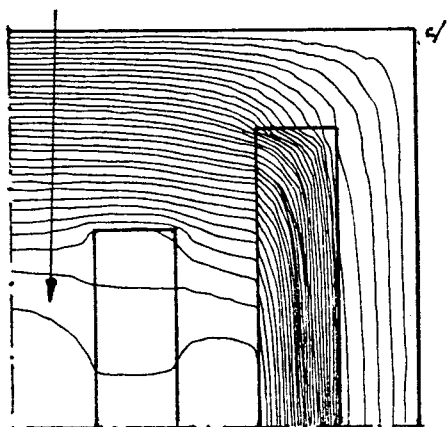
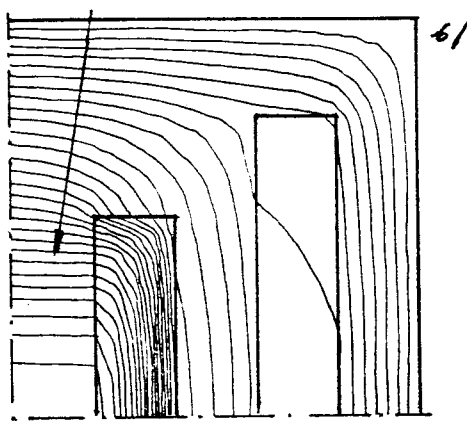
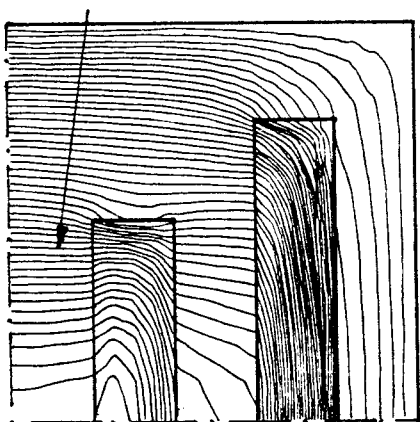


Bild 5.6. Verteilung der normierten Zeitkonstante τ' in einem inhomogenen Zylinder bei $R = h$ und:

- a) $D_1 = D$; $D_2 = D_3 = 10D$; b) $D_1 = D$; $D_2 = 10D$; $D_3 = 0,1D$;
c) $D_1 = D$; $D_2 = 0,1D$; $D_3 = 10D$; d) $D_1 = D$; $D_2 = D_3 = 0,1D$

Wert des Diffusionskoeffizienten ist im entsprechenden Gebiet des Zylinders eine bedeutende Verdichtung der Linien von r' bemerkbar, d.h. zum Durchdringen des Störungsfeldes durch dieses Gebiete ist ein entsprechend größer Zeitumfang erforderlich. Ein kleiner Wert von D verursacht dagegen das Erscheinen nur einzelner Linien von r' , d.h. das betrachtete Gebiet ist für das diffundierende Feld schnell zu durchdringen.

Die vorgestellten Beispiele zeugen von der praktischen Verwendbarkeit der mittleren Zeitkonstante. Sie ist nicht nur ein bequemer ortsabhängiger Zeitparameter, welcher ein Maß für die Dauer eines Diffusionsprozesses ist, sondern ihre graphisch dargestellte räumliche Verteilung gestattet anschaulich, die Richtung und die Geschwindigkeit der Feldausbreitung aufzuzeigen.

5.4. Anwendung des Differenzenverfahrens

5.4.1. Allgemeines Lösungskonzept

Im Abschnitt 4.2.3 wurde zur Anfangs-Randwertaufgabe (4.1-4.4) das Differenzenverfahren (Methode der finiten Differenzen) angewandt. Dank der Approximation der in einem elliptischen Differentialoperator auftretenden Ableitungen mit bestimmten Differenzenquotienten wurde schließlich das Differentialgleichungssystem (4.36) gewonnen. Anstelle der Lösung des Problems (4.1-4.4) müssen jetzt die zeitabhängigen Funktionen $u_i(t)$ des Ausgleichsvorganges in jedem Gitterknoten bestimmt werden.

Da in der Matrixschreibweise die Differentialgleichungssysteme (4.36) und (4.26) eine analoge Gestalt haben, kann man den Algorithmus zur Bestimmung der mittleren Zeitkonstante mit Hilfe des Differenzenverfahrens nach den gleichen Prinzipien wie im Abschnitt 5.3.1 bilden. Bei der Berechnung des Hilfsvektors $\{v\} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s\{u^*\}]$ soll die Eigenschaft der Matrix $[C]$ berücksichtigt werden. Beim Differenzenverfahren ist $[C]$ eine Diagonalmatrix mit den Koeffizienten $c_{ij} = -\delta_{ij} w_2(P_i)$. Aus Gl. (5.46) ergibt sich somit

$$\{v\} = -[H]^{-1} \{w_2(P_i)(u_{i0} - u_{i\infty})\}_{i=1}^n. \quad (5.51)$$

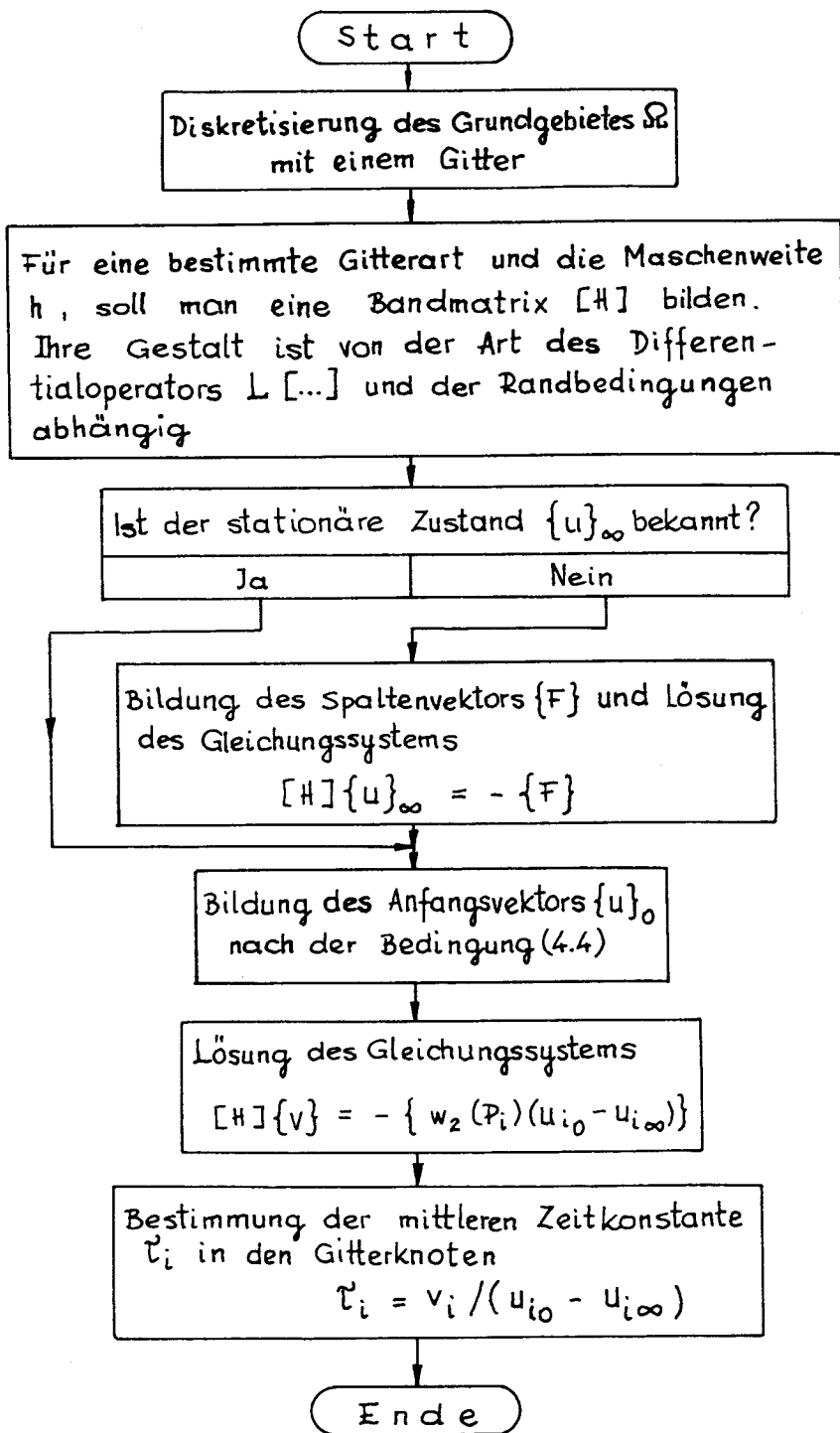


Bild 5.7. Blockdiagramm zum Algorithmus der Berechnung der mittleren Zeitkonstante mit Hilfe des Differenzenverfahrens

Die mittlere Zeitkonstante wird schließlich aus Gl.(5.45) bestimmt.

Der Algorithmus der numerischen Berechnung der Zeitkonstanten mit Hilfe der Methode der finiten Differenzen wird im Bild 5.7 dargestellt. Bei der Berechnung müssen zwei Gleichungssysteme mit einer gemeinsamen Matrix $[H]$ gelöst werden, wobei die Matrix $[H]$ nur ein Mal gebildet wird. Wegen der besonderen Gestalt von $[H]$ werden zur Lösung des Gleichungssystems oft iterative Verfahren, z.B. die Überrelaxationsmethode (SOR) verwendet. Weil bei diesen Methoden die Hauptmatrix des Gleichungssystems keinen Umformungen unterliegt, kann sie im nächsten Schritt zum zweiten Mal ausgenutzt werden.

5.4.2. Berechnungsbeispiele

Beispiel 5: Zeitkonstante der Wirbelströme in einer Kreisscheibe

Betrachtet wird eine leitende Kreisscheibe, die einen stromdurchflossenen Leiter umfaßt (Bild 5.8). Im Fall einer Erregerstromänderung werden in der Scheibe Wirbelströme induziert. Das erregende magnetische Feld besitzt nur eine Komponente $H = 1_\phi H$, wobei $H = i(t)/(2\pi r)$ ist. Der Vektor der Stromdichte \mathbf{J} hat dagegen eine r - und eine ϕ -Komponente (kreiszyndrisches Koordinatensystem). Die magnetische Feldstärke der induzierten Wirbel-

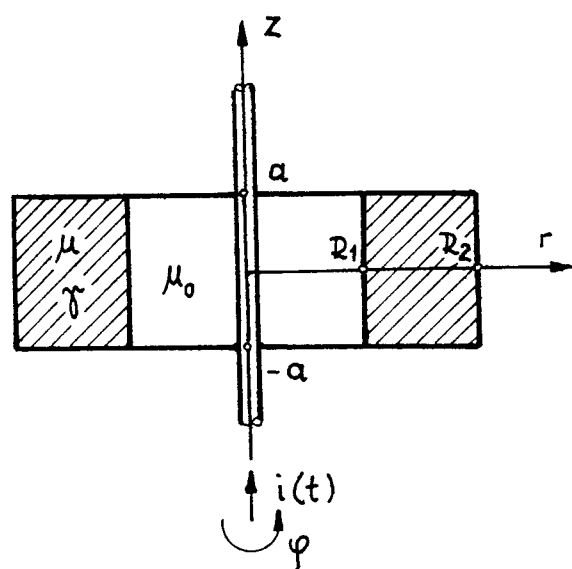


Bild 5.8. Leitende Kreisscheibe mit stromdurchflossenen Leiter

ströme hat somit auch nur eine ϕ -Komponente und erfüllt folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \mu\gamma \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \text{für } t \geq 0, \quad (5.52)$$

wobei μ die Permeabilität und γ die elektrische Leitfähigkeit sind.

Die Randbedingung auf der Kreisscheibenfläche

$$H(r, z, t) = \frac{i(t)}{2\pi} \cdot \begin{cases} r^{-1}, & \text{für } z = \pm a \\ R_1^{-1}, & \text{für } r = R_1 \\ R_2^{-1}, & \text{für } r = R_2 \end{cases} \quad (5.53)$$

bedeutet, daß das magnetische Feld der Wirbelströme nur im Raum $R_1 \leq r \leq R_2$; $-a \leq z \leq a$ konzentriert wird.

Analytische Lösung

Das dargestellte Problem wurde mit Hilfe der Methode der Variablentrennung in der Arbeit [56] von Lipiński behandelt. Es wurden die Laplace-Transformierte der nichtstationären, magnetischen Feldstärke im Innenraum der Kreisscheibe ($R_1 \leq r \leq R_2$; $-a \leq z \leq a$)

$$H^*(r, z, s) = \frac{I^*}{2\pi r} \frac{\text{ch}(\sqrt{s\mu\gamma} z)}{\text{ch}(\sqrt{s\mu\gamma} a)} + \frac{I^* s\mu\gamma}{\pi R_1 R_2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{m(m^2 + s\mu\gamma)} \cos mz \cdot \right. \quad (5.54)$$

$$\left. \cdot \frac{[R_2 K_1(\beta R_2) - R_1 K_1(\beta R_1)] I_1(\beta r) + [R_1 I_1(\beta R_1) - R_2 I_1(\beta R_2)] K_1(\beta r)}{I_1(\beta R_1) K_1(\beta R_2) - I_1(\beta R_2) K_1(\beta R_1)} \right\},$$

wobei $m = (2n+1)\pi/(2a)$, $\beta^2 = s\mu\gamma + m^2$, $I_1(\dots)$, $K_1(\dots)$ die modifizierten Bessel-Funktionen sind und die mittlere Zeitkonstante des Feldes (5.54)

$$\tau(r, z) = \mu\gamma a^2 \left\{ \frac{a^2 - z^2}{2a^2} - \frac{2r}{R_1 R_2 a^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^3} \cos mz \cdot \right. \quad (5.55)$$

$$\left. \cdot \frac{[R_2 K_1(m R_2) - R_1 K_1(m R_1)] I_1(m r) + [R_1 I_1(m R_1) - R_2 I_1(m R_2)] K_1(m r)}{I_1(m R_1) K_1(m R_2) - I_1(m R_2) K_1(m R_1)} \right\}$$

bestimmt.

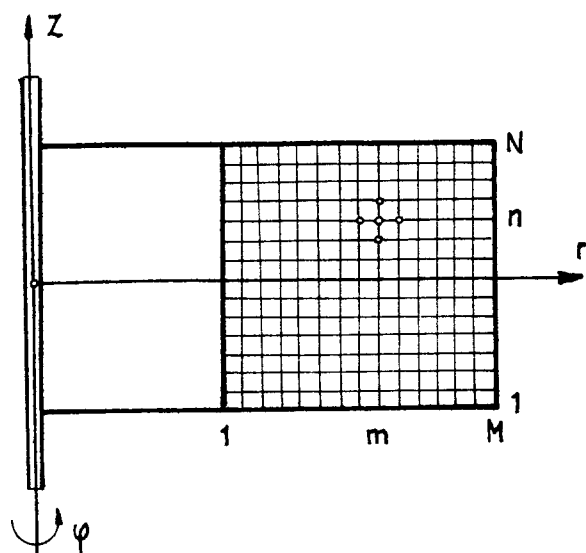


Bild 5.9. Quadratisches Gitter der Maschenweite h

Das im Bild 5.9 dargestellte Gebiet wurde mit einem quadratischen Gitter der Maschenweite h überzogen. Auf diese Weise wird die partielle Differentialgleichung (5.52) in jedem inneren Knoten durch die Differenzengleichung der Ortsvariablen ersetzt

$$D_{+z} D_{-z} H_{m,n}(t) + D_{+r} D_{-r} H_{m,n}(t) + D_{Or} H_{m,n}(t)/r_{m,n} - H_{m,n}(t)/r_{m,n}^2 = \mu \gamma \, dH_{m,n}(t)/dt, \quad (5.56)$$

(m=2, ..., M-1; n=2, ..., N-1),

wobei

$$\begin{aligned} r_{m,n} &= R_1 + (m-1)h, \\ z_{m,n} &= -a + (n-1)h, \\ H_{m,n}(t) &= H(r_{m,n}, z_{m,n}, t) \end{aligned} \quad (5.57)$$

und

$$\begin{aligned} D_{+r} H_{m,n} &= (H_{m+1,n} - H_{m,n})/h, \\ D_{-r} H_{m,n} &= (H_{m,n} - H_{m-1,n})/h, \\ D_{Or} H_{m,n} &= (D_{+r} H_{m,n} + D_{-r} H_{m,n})/2. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Die Differenzenquotienten D_{+z} und D_{-z} haben eine analoge Form.

Aus der Beziehung (5.53) ergibt sich

$$\begin{aligned} H_{m,1} = H_{m,N} &= \frac{i(t)}{2\pi r}, \quad (m=1, \dots, M), \\ \left. \begin{aligned} H_{1,n} &= \frac{i(t)}{2\pi R_1}, \\ H_{M,n} &= \frac{i(t)}{2\pi R_2}, \end{aligned} \right\} \quad (n=1, \dots, N). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Laut der Gl. (5.51) müssen die Elemente des Hilfsvektors $\{v\}$ folgendes Gleichungssystem erfüllen

$$\left\{ \begin{aligned} D_{+z} D_{-z} v_{m,n} + D_{+r} D_{-r} v_{m,n} + D_{\theta r} v_{m,n} / r_{m,n} - \\ - v_{m,n} / r_{m,n}^2 &= \mu \gamma [H_{m,n}(\infty) - H_{m,n}(0)], \quad (5.60) \\ &\quad (m=2, \dots, M-1; n=2, \dots, N-1) \\ v_{m,1} = v_{m,N} &= 0, \quad (m=1, \dots, M) \\ v_{1,n} = v_{M,n} &= 0, \quad (n=1, \dots, N) \end{aligned} \right.$$

wobei $H_{m,n}(\infty) = I/(2\pi r_{m,n})$ und $H_{m,n}(0) = 0$ sind. Das Gleichungssystem (5.60) wurde auf Grund des Differentialgleichungssystems (5.56) und der Bedingungen (5.59) konstruiert. Die mittlere Zeitkonstante des Verlaufs $H_{m,n}(t)$ wird dann durch die Beziehung

$$\tau_{m,n} = -v_{m,n} / H_{m,n}(\infty) \quad (5.61)$$

bestimmt.

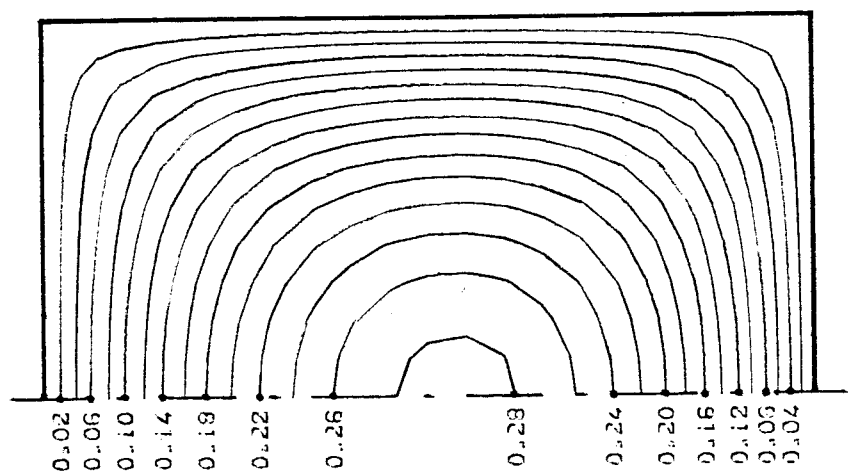


Bild 5.10. Verteilung der normierten Zeitkonstante τ' in der Kreisscheibe. Im Punkt $r=(R_1 + R_2)/2$; $z=0$: $\tau' = 0,28530$

In Anlehnung an die Gl'n (5.60-5.61) wurde die numerische Analyse durchgeführt, wobei zur Lösung der Gl.(5.60) die Überrelaxationsmethode angewandt wurde. Im Bild 5.10 wird die Verteilung der normierten Zeitkonstante $\tau' = \tau/(\mu\gamma a^2)$ in einer Kreisscheibe mit den Abmessungen: $R_1 = a$; $R_2 = 3R_1$ dargestellt. Tabelle 5.3, in der der minimale und maximale relative Fehler der numerisch gewonnenen Ergebnisse gegenüber der exakten Lösung (5.55) in Abhängigkeit von der Zerlegungszahl $l = a/h$ angegeben wurde, zeugt von der Konvergenz der vorgeschlagenen Methode und ihrer praktischen Verwendbarkeit bei den Berechnungen.

l	δ_{\min}	δ_{\max}
3	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$4.2 \cdot 10^{-2}$
4	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$3.2 \cdot 10^{-2}$
5	$7.9 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$
6	$5.5 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$
7	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$
8	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$
9	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
10	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 5.3. Nachprüfung der Konvergenz der numerischen Lösung (angegeben wird minimaler und maximaler, relativer Fehler in Abhängigkeit von der Zerlegungszahl $l=a/h$)

Beispiel 6: Zeitkonstante der Wirbelströme in einem Kern mit rechteckigem Querschnitt

Ein rechteckiger Kern der Permeabilität μ und der Leitfähigkeit γ befindet sich im magnetischen Feld einer stromdurchflossenen Erregerspule (Bild 5.11). Es wird eine große Länge der Anordnung gegenüber den Querschnittabmessungen vorausgesetzt, d.h. $\partial/\partial z=0$. Der Vektor der magnetischen Feldstärke hat nur eine z-Komponente ($\mathbf{H} = \mathbf{1}_z \cdot H$) senkrecht zur Bildebene, die folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \mu\gamma \frac{\partial H}{\partial t} \quad , \quad \text{für } t \geq 0, \tag{5.62}$$

die homogene Anfangs- und die Dirichletsche Randbedingung

$$H(\pm a, y, t) = H(x, \pm b, t) = H_T(t) \tag{5.63}$$

erfüllt.

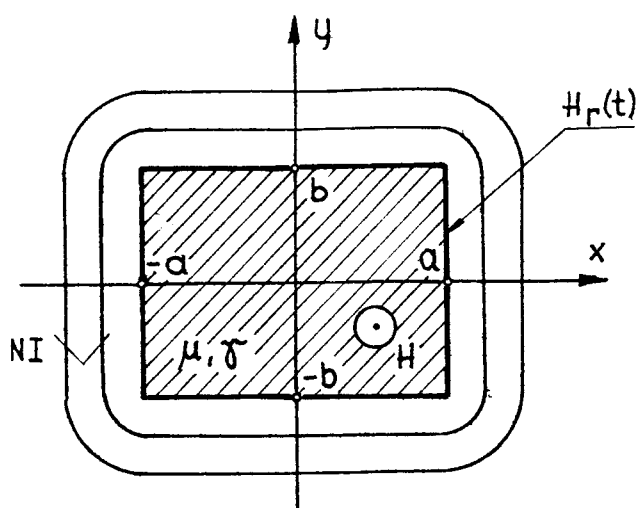


Bild 5.11. Rechteckiger Kern im Feld einer stromdurchflossenen Spule

Analytische Lösung

Die analytische Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe (5.62-5.63) lautet [56]:

$$H^*(x, y, s) = H_{\Gamma}^*(s) \left[\frac{\text{ch}(\sqrt{s\mu\gamma} x)}{\text{ch}(\sqrt{s\mu\gamma} a)} + \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s\mu\gamma}{m(m^2 + s\mu\gamma)} \frac{\text{ch}(\beta y)}{\text{ch}(\beta b)} \cos mx \right], \quad (5.64)$$

mit $m = (2n+1)\pi/(2a)$, $\beta^2 = s\mu\gamma + m^2$. Daraus folgt die mittlere Zeitkonstante

$$\tau(x, y) = \mu\gamma a^2 \left[\frac{a^2 - x^2}{2a^2} - \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\text{ch}(my)}{\text{ch}(mb)} \cos mx \right] \quad (5.65)$$

des Verlaufs (5.64).

Numerische Lösung

Das analysierte Gebiet wurde analog wie im vorigen Beispiel mit einem Rechteckgitter der Machenweite h unterteilt. Der Hilfsvektor $\{v\}$ wurde aus folgendem System von Differenzgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{+x} D_{-x} v_{m,n} + D_{+y} D_{-y} v_{m,n} = \mu\gamma [H_{m,n}(\infty) - H_{m,n}(0)] , \\ \quad \quad \quad (m=2, \dots, M-1; n=2, \dots, N-1) \\ v_{m,1} = v_{m,N} = 0 , \quad (m=1, \dots, M) \\ v_{1,n} = v_{M,n} = 0 , \quad (n=1, \dots, N) \end{array} \right. \quad (5.66)$$

und die Zeitkonstante aus der Beziehung (5.61) gewonnen, wobei $H_{m,n}(\infty) = H_I$ und $H_{m,n}(0) = 0$ waren. Bei der numerischen Lösung des Problems wurde die Symmetrie der Anordnung gegenüber den beiden Achsen des Koordinatensystems berücksichtigt. Ergebnisse der numerischen Auswertungen für $a = b$ sind im Bild 5.12 dargestellt. Die normierte Zeitkonstante $\tau' = \tau/(\mu\gamma a^2)$ wurde bei $l = a/h = 10$ mit einem maximalen relativen Fehler von 1,3% bestimmt.

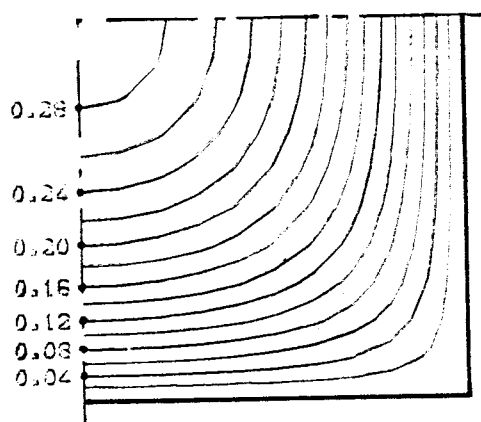


Bild 5.12. Verteilung der normierten Zeitkonstante in einem Viertel des rechteckigen Kernes. In der Mitte der Anordnung $\tau' = 0,29410$

* * *

Die in den Bildern 5.10 und 5.12 dargestellten Linien $\tau' = \text{const}$ zeugen von der Richtung der Diffusion des Magnetfeldes: von der Randfläche, d.h. von dem Ort der Felderregung ($\tau' = 0$) zum Inneren des Gebietes.

6. BESTIMMUNG VON PARAMETERN VEREINFACHTER ÜBERTRAGUNGSFUNKTIONEN VON ANORDNUNGEN MIT VERTEILTEN PARAMETERN

6.1. Allgemeines

Die mittlere Zeitkonstante bildet eine ortsabhängige Funktion, die bei zeitlich-räumlichen Ausgleichsvorgängen die Dauer eines nichtstationären Zustandes in einem Raumpunkt bestimmt und, wie im Abschnitt 5.3.2 gezeigt wurde, durch die graphische Darstellung ihrer räumlichen Verteilung von Richtung und Geschwindigkeit der Prozessausbreitung zeugen kann. Leider reicht die Kenntnis der mittleren Zeitkonstante nicht in allen Fällen aus. Bei Dynamikuntersuchungen erhebt sich oft die Frage nach den anderen, das dynamische Verhalten eines Systems mit verteilten Parametern charakterisierenden Kenngrößen wie: die Verzögerung-, Tot- bzw. Laufzeiten, sowie die Ordnung der Verzögerung. Zum Beispiel ist bei der Steuerung von Regelstrecken mit Regelsystemen, die mit Meßfühler ausgestattet sind, die dynamische Fehler verursachen, die Kenntnis der Totzeiten von großer Bedeutung. Eine verspätete Reaktion des Regelsystems auf Störungen kann im geschlossenen Regelkreis zum Erscheinen von Schwingungen führen und Instabilität verursachen [36].

Dynamische Eigenschaften eines Objektes werden durch Identifikation bestimmt. Sie besteht darin, daß eine Reihe von Betriebsmessungen durchgeführt und dann die gewonnenen Meßwerte entsprechend approximiert werden. Als Ergebnis ergibt sich ein bestimmtes mathematisches Modell, welches zur theoretischen Analyse des untersuchten Systems angewandt werden kann. Bei einer klassischen Identifikation wird die Systemantwort auf eine typische Testfunktion (z.B. die Sprungantwort) registriert. Auf ihrer Grundlage werden mit Hilfe bestimmter Verfahren die Parameter der angenommenen Übertragungsfunktionen ermittelt. In der Literatur [36] wird z.B. das Momenten- und Flächenverfahren, sowie die Methoden von *Küpfmüller* und *Strejc* genannt. Mit der Methode von *Küpfmüller* kann man die Parameter von totzeitbehafteten Proportionalgliedern mit Verzögerung erster und mit der Methode von *Strejc* m -ter Ordnung bestimmen. Von *Skoczowski* [90]

wurde ein Verfahren vorgeschlagen, welches auf Grund der Sprungantwort eine Approximation von einem Proportionalglied mit Verzögerung m -ter Ordnung ohne Totzeit gestattet. Bei den o.g. Methoden ist die Kenntnis einer experimentell gewonnenen Systemantwort erforderlich. Wenn sich das betrachtete System mit verteilten Parametern erst in der Entwurfsphase befindet, besteht oft keine Möglichkeit die notwendigen Betriebsmessungen zu realisieren. In diesem Fall kann man auf Grundlage der durchgeführten numerischen Experimente das dynamische Verhalten voraussagen und die gesuchten Parameter der Übertragungsfunktion abschätzen.

In diesem Kapitel werden zwei numerische Algorithmen zur Bestimmung von ortsabhängigen Parametern von vereinfachten Übertragungsfunktionen angegeben. Die Algorithmen nutzen außer einem Verfahren zur Behandlung von Randwertproblemen (z.B. das FE- oder Differenzenverfahren) auch die von Purczyński [76] entwickelte modifizierte Momentenmethode.

Der Inhalt des Kapitels wurde bereits teilweise in den Arbeiten [14,17,18,78] veröffentlicht.

6.2. Parameterbestimmung mit Hilfe der modifizierten Momentenmethode

In diesem Abschnitt wird auszugsweise die modifizierte Momentenmethode dargestellt (die Methode wurde ausführlich im Beitrag [76] präsentiert) und einige Endformeln angegeben.

Nach der Methode werden für eine Sprungantwort $U(P,t)$ die Hilfsgrößen (Momente):

$$G_k(P) = k \int_0^{\infty} \frac{U(P,t) - U(P,\infty)}{U(P,0) - U(P,\infty)} t^{k-1} dt \quad (6.1)$$

berechnet, mit $k = 1, \dots, N$, wobei N die Zahl der gesuchten ortsabhängigen Parameter einer Übertragungsfunktion bedeutet. Die Parameter kann man aus den in der Tabelle 6.1 zusammengestellten Beziehungen ermitteln. Diese Beziehungen wurden für die am häufigsten verwendeten Modelle nach dem im weiteren dargestellten Gedankengang abgeleitet.

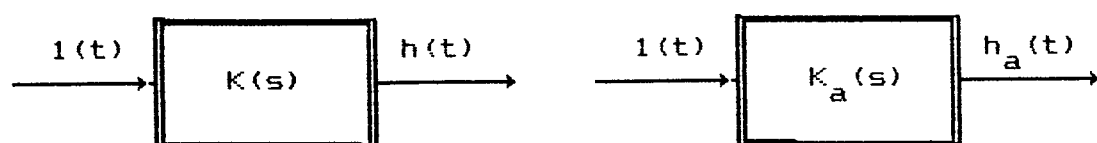


Bild 6.1. Übertragungselement mit der realen und der approximierenden Übertragungsfunktion

Es wird ein lineares Übertragungselement $K_a(s)$ als Approximation für eine in Wirklichkeit komplizierte reale Übertragungsfunktion $K(s)$ gesucht. Die entsprechenden Übergangsfunktionen $h(t)$ und $h_a(t)$ sollen im Anfangs- und Endzustand übereinstimmen. Der Einfachheit halber soll im Folgenden die Ortsabhängigkeit nicht extra ausgewiesen werden (z.B. $U(P,t) \rightarrow U(t)$). Die Übertragungsfunktionen $K(s)$ und $K_a(s)$ lassen sich in die Potenzreihen

$$K(s) = K(0) + sK'(0) + \frac{s^2}{2} K''(0) + \dots \quad (6.2)$$

und

$$K_a(s) = K_a(0) + sK_a'(0) + \frac{s^2}{2} K_a''(0) + \dots \quad (6.3)$$

entwickeln.

Die angewandte Approximation fordert die Übereinstimmung der

Tabelle 6.1. Die Parameter von approximierenden Übertragungsfunktionen $K_{a,i}(s)$

i	$K_{a,i}(s)$	Parameter
1	$\frac{1}{1 + s\tau}$	$\tau = G_1$
2	$\frac{\exp(-s\tau_0)}{1 + s\tau}$	$\tau = \sqrt{G_2 - G_1^2}$ $\tau_0 = G_1 - \sqrt{G_2 - G_1^2}$
3	$\frac{1}{(1 + s\tau)^m}$	$m = G_1^2 / (G_2 - G_1^2)$ $\tau = (G_2 - G_1^2) / G_1$

ersten $N+1$ Glieder beider Potenzreihen, d.h.

$$K_a^{(k)}(0) = K^{(k)}(0) \quad , \quad (6.4)$$

mit $k = 0, 1, \dots, N$. Bei $k = 0$ ist die Forderung (6.4) der Bedingung $h_a(\infty) = h(\infty)$ äquivalent und für $k > 0$ der Beziehung [76]:

$$(-1)^k k \int_0^{\infty} [h_a(\infty) - h_a(t)] t^{k-1} dt = (-1)^k k \int_0^{\infty} [h(\infty) - h(t)] t^{k-1} dt \quad . \quad (6.5)$$

Daraus folgt das Gleichungssystem

$$G_{a,k} \equiv k \int_0^{\infty} \frac{h_a(t) - h_a(\infty)}{h_a(0) - h_a(\infty)} t^{k-1} dt = k \int_0^{\infty} \frac{h(t) - h(\infty)}{h(0) - h(\infty)} t^{k-1} dt \equiv G_k \quad (k=1, \dots, N) \quad (6.6)$$

in dem G_k durch eine Messung bzw. durch ein numerisches Experiment ermittelt wird. Weil für die gegebene Übertragungsfunktion $K_a(s)$ der ihr zugeordnete Verlauf $h_a(t)$ bekannt ist, läßt sich auch der Faktor $G_{a,k}$ durch Integration berechnen. Die linke Seite der Gl. (6.6) enthält dann die gesuchten Parameter von $K_a(s)$. Nach der Lösung des Gleichungssystems wurden in der Arbeit [76] Parameter der approximierenden Übertragungsfunktionen in Abhängigkeit von den Momenten G_k (Tabelle 6.1) gewonnen.

Die modifizierte Momentenmethode stellt eine Erweiterung der Methode der mittleren Zeitkonstante dar. Während die mittlere Zeitkonstante $\tau(P)$ als Gewichtsmittelwert (3.22) von Zeitkonstanten τ_i des Verlaufes (3.17) betrachtet werden kann, bilden die eingeführten Momente $G_k(P)$ eine andere Art von Mittelwerten:

$$G_k(P) = k! \sum_{i=1}^{\infty} [\tau_i^k U_i(P)] / \sum_{i=1}^{\infty} U_i(P) \quad . \quad (6.7)$$

Nach der Bestimmung der Parameter der approximierenden Übertragungsfunktion, kann man unter Verwendung der ihr entsprechenden Übergangsfunktion (vergleiche die im Anhang B angegebenen Beziehungen (B1-B4)) den untersuchten Diffusionsverlauf $U(P,t)$ in folgender genäherter Form darstellen:

$$U(P,t) \approx U_a(P,t) = U(P,0) + [U(P,\infty) - U(P,0)] h_a(P,t) \quad , \quad (6.8)$$

wobei die Übergangsfunktion $h_a(P,t)$ ebenso wie $G_k(P)$ und $K_a(P,s)$

im allgemeinen ortsabhängig sind. Falls $h_a(P,t)$ die Übergangsfunktion eines Proportionalgliedes mit Verzögerung 1. Ordnung ist, geht die Gl.(6.8) in die Gl.(3.21) über. Man kann dabei bemerken, daß unabhängig von der Art des angenommenen Modells (der vorausgesetzten Übertragungsfunktion) die Vorgänge $U(P,t)$ und $U_a(P,t)$ eine gleiche mittlere Zeitkonstante $\tau(P)$ besitzen und die folgenden Bedingungen (siehe auch Abschnitt 3.4) erfüllen

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [U_a(P,t) - U(P,\infty)] &= 0, \\ \int_0^{\infty} [U_a(P,t) - U(P,t)] dt &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Da der genäherte Verlauf in vielen praktischen Fällen den üblichen Genauigkeitsanforderungen entspricht, sind die approximierenden Übertragungsfunktionen besonders zur Analyse des dynamischen Verhaltens im Zeitbereich geeignet [36,90,92]. Wenn das Frequenzverhalten in einem weiten Frequenzbereich untersucht werden soll, muß man beachten, daß die Approximation jeweils nur für den unteren (Momentenmethode) Bereich gilt und damit ihre Verwendbarkeit auf den jeweiligen Bereich eingeschränkt ist.

6.3. Anwendung von Methoden der numerischen Feldanalyse

6.3.1. Verwendung der Laplace-Transformation

Die numerischen Verfahren zur Berechnung des Raumanteils der Lösung bei Diffusionsprozessen sind, wie im Abschnitt 4.2 gezeigt wurde, durch eine gemeinsame Eigenschaft gekennzeichnet: Ihre Anwendung führt zur Lösung eines Systems von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mit bestimmten Anfangsbedingungen. Hier soll im weiteren der Algorithmus zur Bestimmung der Parameter der Übertragungsfunktion unter Verwendung des FE-Verfahrens ausgewählt werden.

Betrachtet wird eine Funktion $U(P,t)$, welche die Differentialgleichung (4.1) und die Bedingungen (4.2-4.4) erfüllt. Nach der Anwendung eines Diskretisierungsverfahrens wird die Funktion $U(P,t)$ in einer diskreten Form $\{u_i(t)\}$ gesucht, wobei die zeitabhängigen Vektorelemente $u_i(t)$ die Lösung der Anfangs-Randwert-

aufgabe (4.1-4.4) in bestimmten Raumpunkten P_i (Netz- bzw. Elementeknoten) bedeuten. Der gesuchte Vektor $\{u\}$ erfüllt folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} [H]\{u\} + [C]\dot{\{u\}} + \{F\} &= 0, \\ \{u\}_0 &= \{U_0(P_i)\}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

dessen Lösung kann man in Operatorform (siehe Abschnitt 5.3.1) darstellen

$$\{u^*\} = s^{-1}([H] + s[C])^{-1}([C]s\{u\}_0 - \{F\}), \quad (6.11)$$

wobei $\{u^*\} = \mathcal{L}[\{u\}]$ ist.

Für einen aperiodischen Ausgleichsvorgang $U(P,t)$ gilt die Beziehung [76]:

$$k \int_0^{\infty} [U(P,t) - U(P,\infty)] t^{k-1} dt = (-1)^{k+1} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^k}{ds^k} [sU^*(P,s)]. \quad (6.12)$$

Daraus und aus Gl. (6.1) folgt

$$G_k(P) = (-1)^{k+1} \frac{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^k}{ds^k} [sU^*(P,s)]}{U(P,0) - U(P,\infty)}, \quad (6.13)$$

mit $U^*(P,s) = \mathcal{L}[U(P,t)]$.

Zur Bestimmung der Hilfsgrößen G_k in jedem Knotenpunkt müssen die Ableitungen $d^k(s\{u^*\})/ds^k$ berechnet werden. Unter Berücksichtigung der Lösung (6.1) ergibt sich:

$$\frac{d}{ds} (s\{u^*\}) = ([H] + s[C])^{-1} [C](\{u\}_0 - s\{u^*\}) \quad (6.14)$$

und

$$\frac{d^k}{ds^k} (s\{u^*\}) = -k([H] + s[C])^{-1} [C] \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} (s\{u^*\}) \quad (6.15)$$

($k=2, \dots, N$)

Die Beziehung (6.14) wurde im Abschnitt 5.3.1 bewiesen. Im weiteren wird die Beziehung (6.15) abgeleitet.

B e w e i s der Beziehung (6.15):

Der Beweis wird auf induktivem Wege durchgeführt.

1. Es wird die Richtigkeit der Beziehung (6.15) für $k=2$ bewiesen:

$$\frac{d^2}{ds^2} (s\{u^*\}) = \frac{d}{ds} \left[\frac{d}{ds} (s\{u^*\}) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{ds} \left[([H] + s[C])^{-1} [C] (\{u\}_0 - s\{u^*\}) \right] = \\
&= -([H] + s[C])^{-1} [C] ([H] + s[C])^{-1} [C] (\{u\}_0 - s\{u^*\}) - \\
&\quad - ([H] + s[C])^{-1} [C] \frac{d}{ds} (s\{u^*\}) \quad (6.16) \\
&= -2([H] + s[C])^{-1} [C] \frac{d}{ds} (s\{u^*\}) .
\end{aligned}$$

2. Es wird die Richtigkeit der Beziehung (6.15) für die Zahl $k=n \geq 2$ vorausgesetzt. Bewiesen wird die Richtigkeit auch für die folgende Zahl von k , d.h. $k=n+1$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}} (s\{u^*\}) &= \frac{d}{ds} \left[\frac{d^n}{ds^n} (s\{u^*\}) \right] = \\
&= -n \frac{d}{ds} \left[([H] + s[C])^{-1} [C] \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (s\{u^*\}) \right] \\
&= n([H] + s[C])^{-1} [C] ([H] + s[C])^{-1} [C] \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (s\{u^*\}) - \\
&\quad - n([H] + s[C])^{-1} [C] \frac{d^n}{ds^n} (s\{u^*\}) \quad (6.17) \\
&= ([H] + s[C])^{-1} [C] \left[n([H] + s[C])^{-1} [C] \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (s\{u^*\}) - \right. \\
&\quad \left. - n \frac{d^n}{ds^n} (s\{u^*\}) \right] \\
&= -(n+1) ([H] + s[C])^{-1} [C] \frac{d^n}{ds^n} (s\{u^*\}) .
\end{aligned}$$

3. Das Prinzip der vollständigen Induktion beendet den Beweis.

Bei der Matrixdifferentiation wurden in den Punkten 1. und 2. des Beweises die im Anhang A angegebenen Beziehungen (A2-A4) ausgenutzt.

Wird ein Folge von Hilfsvektoren $\{v^{(1)}\}, \dots, \{v^{(N)}\}$ definiert

$$\{v^{(k)}\} = (-1)^{k+1} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^k}{ds^k} (s\{u^*\}) , \quad (6.18)$$

so ergibt sich unter Berücksichtigung der Gln (6.14-6.15)

$$\{v^{(1)}\} = [H]^{-1} [C] (\{u\}_0 - \{u\}_\infty) \quad (6.19)$$

und

$$\{v^{(k)}\} = (-1)^k k [H]^{-1} [C] \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} (s\{u^*\}) = k [H]^{-1} [C] \{v^{(k-1)}\} \quad (k=2, \dots, N) \quad (6.20)$$

Die gesuchten Hilfsgrößen $G_k(P)$ werden dann in einem i -ten Knotenpunkt aus der Beziehung

$$G_k(P_i) = v_i^{(k)} / (u_{i0} - u_{i\infty}), \quad (6.21)$$

bestimmt, wobei u_{i0} , $u_{i\infty}$ dem Anfangs- und Endzustand des Verlaufs $U(P_i, t)$ entsprechen und durch die Gln (5.40-5.41) gegeben sind.

Auf Grund der Gln (6.19-6.21) und (5.40-5.41) kann man den im Bild 6.2 dargestellten Algorithmus zur numerischen Bestimmung von Parametern der approximierenden Übertragungsfunktionen konstruieren. Bei der Berechnung der Hilfsvektoren $\{v^{(1)}\}, \dots, \{v^{(N)}\}$ muß man entsprechende Gleichungssysteme lösen. Als Hauptmatrix dieser Gleichungssysteme wird eine übliche Steifigkeitsmatrix $[H]$ gebildet. Die Lösung der Systeme erfolgt dann mit der gleichen Software, wie im Fall der numerischen Behandlung stationärer Randwertaufgaben. Dabei wird nur ein wenig größer Speicherplatz erforderlich. Eine sparsame Speicherplatzverwaltung besteht darin, daß die Matrizen $[H]$ und $[C]$ wechselweise berechnet und im gemeinsamen Speicherplatz abgespeichert werden. Zur bestimmung der Momente $G_k(P)$, wobei $k=1, \dots, N$, sollen außerdem drei Vektoren zur Abspeicherung folgender Daten vereinbart werden:

1. der Differenz $\{u\}_0 - \{u\}_\infty$,
2. des vorangehenden Hilfsvektors $\{v^{(k-1)}\}$, für $k \geq 2$,
3. des Vektors der rechten Seite im entsprechenden Gleichungssystem :
 - a) $[C](\{u\}_0 - \{u\}_\infty)$, für $k = 1$,
 - b) $k[C]\{v^{(k-1)}\}$, für $k \geq 2$.

Im Vergleich mit einer stationären Aufgabe wird sich demnach der hier notwendige Speicherplatz nur um den für die zwei zusätzlichen Vektoren unterscheiden.

Falls zur numerischen Lösung des Randwertproblems statt der Methode der finiten Elemente das Differenzenverfahren verwendet

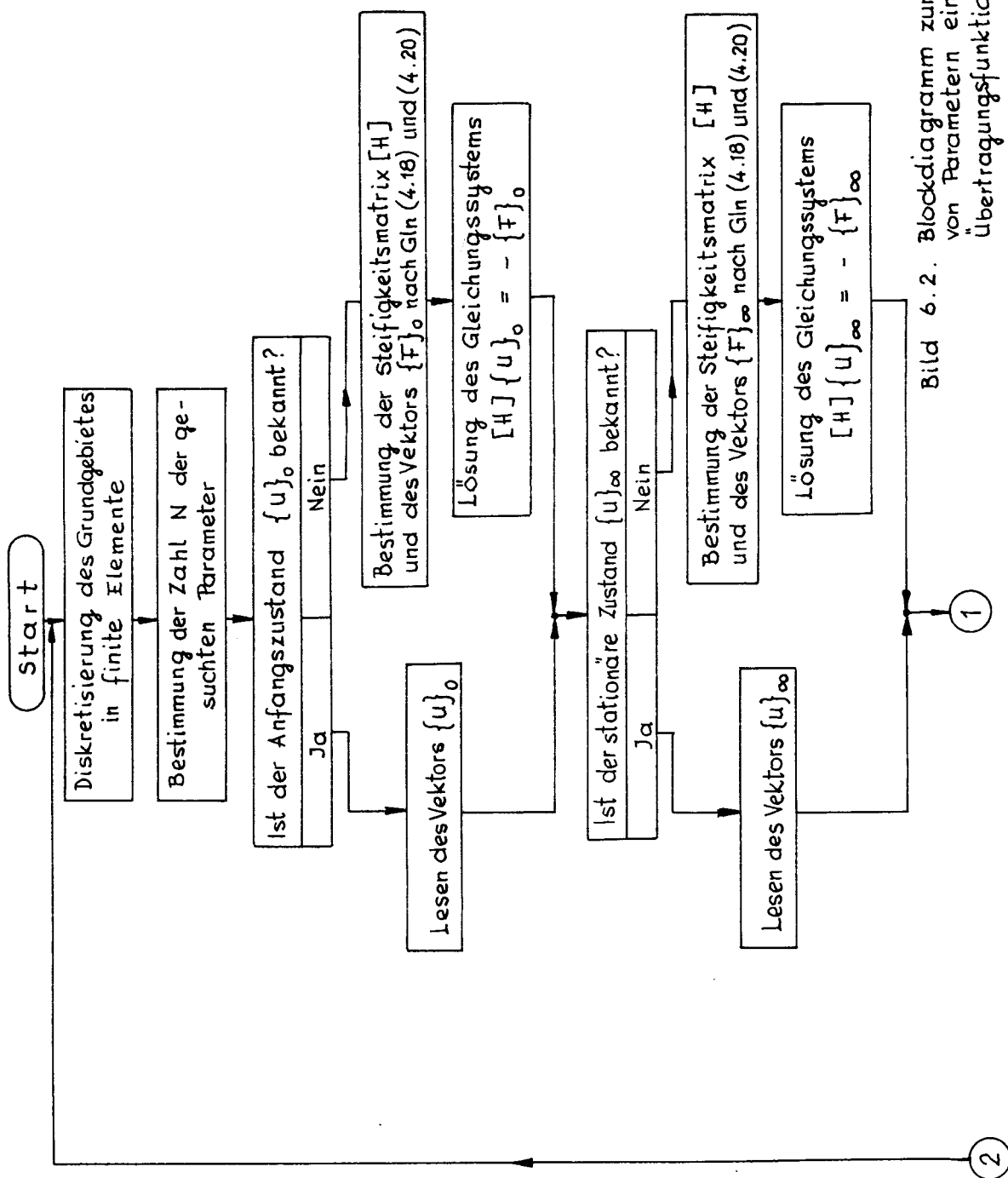


Bild 6.2. Blockdiagramm zur Bestimmung von Parametern einer vereinfachten Übertragungsfunktion (Teil 1)

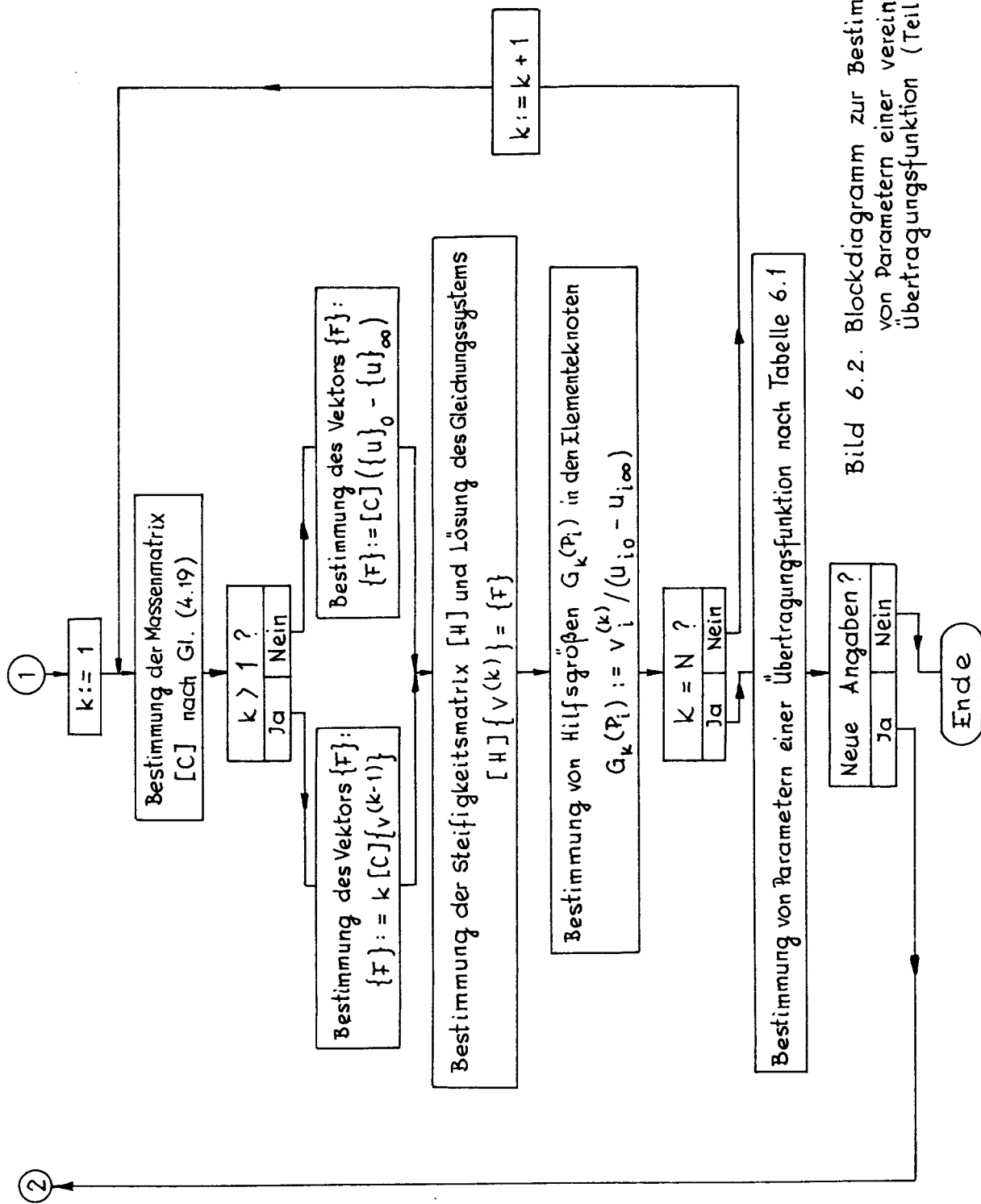


Bild 6.2. Blockdiagramm zur Bestimmung von Parametern einer vereinfachten Übertragungsfunktion (Teil 2)

würde, müßten auf Grund der besonderen Gestalt der Matrix $[C]$ in der Gl. (4.36) die Hilfsvektoren $\{v^{(k)}\}$, $k=1, \dots, N$ aus den folgenden Beziehungen ermittelt werden:

$$\{v^{(1)}\} = -[H]^{-1} \{w_2(P_i)(u_{i0} - u_{i\infty})\} \quad (6.22)$$

und

$$\{v^{(k)}\} = -k [H]^{-1} \{w_2(P_i)v_i^{(k-1)}\}, \quad (k=2, \dots, N) \quad (6.23)$$

6.3.2. Verwendung der Frequenzbereichsanalyse

Die zweite Variante der numerischen Bestimmung von modifizierten Momenten G_k besteht darin, daß die Systemantwort auf eine zeitharmonische Erregung niedriger Kreisfrequenzen ω untersucht wird. Aus mathematischer Sicht muß in diesem Fall statt der Diffusionsgleichung die entsprechende komplexe Helmholtz-Differentialgleichung gelöst werden. Nach der Anwendung einer der Diskretisierungsmethoden, z.B. der FE-Methode, erhält man folgendes System von komplexen, algebraischen Gleichungen:

$$([H] + j\omega[C])\{\underline{u}\} + \{F\} = 0, \quad (6.24)$$

wobei die Matrixkoeffizienten durch die Gl'n (4.18-4.20) und (4.25) zu bestimmen sind. Der komplexe Vektor $\{\underline{u}\} = \{\underline{u}(j\omega)\}$ ist dann die Lösung der Randwertaufgabe in den Elementeknoten.

Soll die komplexe Funktion $\underline{E}(j\omega) = \underline{u}(j\omega)$ ein mit Hilfe des Gleichungssystems (6.24) gewonnener Frequenzgang sein, wobei

$$\underline{E}(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (6.25)$$

ist, dann lassen sich die gesuchten Momente wie folgt darstellen [76]:

$$G_k = (-1)^k \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\frac{d^k}{d(j\omega)^k} \underline{E}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} \quad (6.26)$$

Der Real- und Imaginärteil von $\underline{E}(j\omega)$ sind jeweils gerade bzw. ungerade Funktionen, z.B.:

$$P(\omega) = P(0)(1 + p_2\omega^2 + p_4\omega^4 + \dots), \quad (6.27)$$

$$Q(\omega) = P(0)(q_1\omega + q_3\omega^3 + q_5\omega^5 + \dots) \quad (6.28)$$

Daraus folgt

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d^k E(j\omega)}{d(j\omega)^k} = \frac{1}{j^k} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\omega^k} \begin{cases} jQ(\omega) , & \text{für } k=1,3,5,\dots \\ P(\omega) , & \text{für } k=2,4,6,\dots \end{cases} \quad (6.29)$$

und schließlich

$$G_k = \frac{(-1)^n}{P(0)} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\omega^k} \begin{cases} Q(\omega) , & \text{für } k = 2n-1 \\ P(\omega) , & \text{für } k = 2n \end{cases} \quad n=1,2,\dots \quad (6.30)$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (6.27-6.28) erhält man

$$G_k = (-1)^n k! \begin{cases} q_k , & \text{für } k = 2n-1 \\ p_k , & \text{für } k = 2n \end{cases} \quad n=1,2,\dots \quad (6.31)$$

Die Koeffizienten q_k und p_k müssen auf Grund des aus Gl.(6.24) gewonnenen Frequenzganges, z.B. durch Interpolation, ermittelt werden. Durch Anwendung der linearen Interpolation kann man die Koeffizienten q_1 und p_2 bestimmen, wobei das Gleichungssystem (6.24) zweimal (für die Kreisfrequenzen $\omega_0 = 0$ und ω_1) gelöst werden muß. Schließlich ergibt sich

$$q_1 = \frac{Q(\omega_1)}{\omega_1 P(0)} , \quad p_2 = \frac{1}{\omega_1^2} \left[\frac{P(\omega_1)}{P(0)} - 1 \right] , \quad (6.32)$$

und

$$G_1 = - \frac{Q(\omega_1)}{\omega_1 P(0)} , \quad G_2 = \frac{2}{\omega_1^2} \left[1 - \frac{P(\omega_1)}{P(0)} \right] . \quad (6.33)$$

Bei der Berechnung soll die Kreisfrequenz ω_1 hinreichend klein angenommen werden, weil nur in diesem Fall die angewandten Interpolationsansätze

$$P(\omega) \approx P(0)(1 + p_2 \omega^2) , \quad (6.34)$$

$$Q(\omega) \approx P(0)q_1 \omega , \quad (6.35)$$

den wirklichen Frequenzgang im Intervall $\langle 0, \omega_1 \rangle$ zufriedenstellend annähern können. Sollen die weitere Momente G_k ermittelt werden, so muß man das System (6.24) für die folgenden Kreisfrequenzen lösen und Interpolationspolynome höherer Ordnung verwenden.

Das dargestellte Berechnungsverfahren hat zwei wichtige Vorteile:

- Man kann die schon vorhandene und für stationäre Wirbelstromprobleme besonders gut entwickelte Software direkt benutzen;
- Da die numerischen Berechnungen nur für einige sehr kleine Frequenzen durchgeführt werden müssen, treten keine mit der Eindringtiefe verbundenen Probleme der Raumdiskretisierung auf.

Im Vergleich mit dem im Abschnitt 6.3.1 dargestellten Verfahren, ist hier die Lösung eines komplexen Gleichungssystems (6.24) erforderlich. Man muß demnach mit einem größeren Speicherplatzbedarf und einer längeren Verarbeitungszeit rechnen.

Um das vorgestellte Verfahren kurz illustrieren zu können, wird das im Abschnitt 5.4.2 präsentierte Beispiel 6 nochmals betrachtet. In der Mitte der Anordnung wurde der Frequenzgang $E(j\omega T) = \underline{H}(j\omega T) / \underline{H}(j\omega T=0)$ untersucht, wobei $T = \mu\gamma a^2$ ist. Für die Parameter $\omega T=0$ und $\omega T=0,1$ wurde bestimmt

$$E(j \cdot 0) = 1 ,$$

$$E(j \cdot 0,1) = 0,999350 - j0,029455 .$$

Aus den Beziehungen (6.33) folgt

$$G_1/T = 0,29455 \text{ und } G_2/T^2 = 0,13000 .$$

Das Verhältnis G_1/T entspricht der normierten Zeitkonstanten τ . Im Abschnitt 5.4.2 wurde $\tau = 0,29410$ angegeben. In der Tabelle 6.2 werden die Parameter der approximierenden Übertragungsfunktionen dieses Beispiels zusammengestellt.

Tabelle 6.2 Die Parameter von approximierenden Übertragungsfunktionen $K_a(s)$

$K_a(s)$	Parameter
$\frac{1}{1 + s\tau}$	$\tau = 0,29455 \cdot T$
$\frac{\exp(-s\tau_0)}{1 + s\tau}$	$\tau_0 = 0,08661 \cdot T$ $\tau = 0,20794 \cdot T$
$\frac{1}{(1 + s\tau)^m}$	$m = 2,0065$ $\tau = 0,14680 \cdot T$

6.4. Berechnungsbeispiel

Beispiel 7: Nichtstationäres Wärmefeld in einem unendlich langen Stab mit rechteckigem Querschnitt

Ein unendlich langer rechteckiger Stab: $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ wird durch innere Wärmequellen konstanter Leistungsdichte q_v erwärmt, während auf seiner Oberfläche der Wärmeaustausch mit der Umgebung auftritt. Die Anfangstemperatur sowie die Temperatur der Umgebung sind gleich Null angenommen. Vorausgesetzt wird, daß alle Stoffwerte: die Leitfähigkeit (λ), die spezifische Wärme (c_p), die Dichte (ρ) und der Wärmeübertragungskoeffizient (α) einen konstanten Wert aufweisen.

Das nichtstationäre Temperaturfeld $T(x, y, t)$ erfüllt im betrachteten Gebiet die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{q_v}{\lambda}, \quad \text{für } t \geq 0, \quad (6.36)$$

mit $\kappa = \lambda / (c_p \rho)$, die homogene Anfangsbedingung und für $t \geq 0$, laut dem Newtonschen Gesetz folgende Randbedingungen

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\pm a} \pm \alpha T(\pm a, y, t) = 0, \quad -b \leq y \leq b, \quad (6.37)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=\pm b} \pm \alpha T(x, \pm b, t) = 0, \quad -a \leq x \leq a. \quad (6.38)$$

Analytische Lösung

Die analytische Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe (6.36-6.38) kann man mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen gewinnen. Das nichtstationäre Feld wird dann mit folgender Beziehung beschrieben

$$T(x, y, t) = \frac{4q_v a^2}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_m) \sin(\gamma_n) \cos(\mu_m \frac{x}{a}) \cos(\gamma_n \frac{y}{b})}{\mu_m \gamma_n \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right)} \cdot \frac{1 - \exp \left[- \left(\mu_m^2 + \frac{\gamma_n^2}{l^2} \right) \frac{\kappa t}{a^2} \right]}{\mu_m^2 + \frac{\gamma_n^2}{l^2}}, \quad (6.39)$$

wobei μ_m und γ_n die aufeinanderfolgenden positiven Wurzeln der Gleichungen $\mu \operatorname{tg} \mu = \operatorname{Bi}$, $\gamma \operatorname{tg} \gamma = 1 \cdot \operatorname{Bi}$; $\operatorname{Bi} = \alpha a / \lambda$ die Biot-Zahl und $l = b/a$ bedeuten.

Numerische Lösung

Bei der numerischen Lösung wurde aus Symmetriegründen nur ein Viertel des untersuchten Gebietes, d.h. $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ betrachtet und in 288 finite Dreieckselemente (169 Elementeknoten) unter-

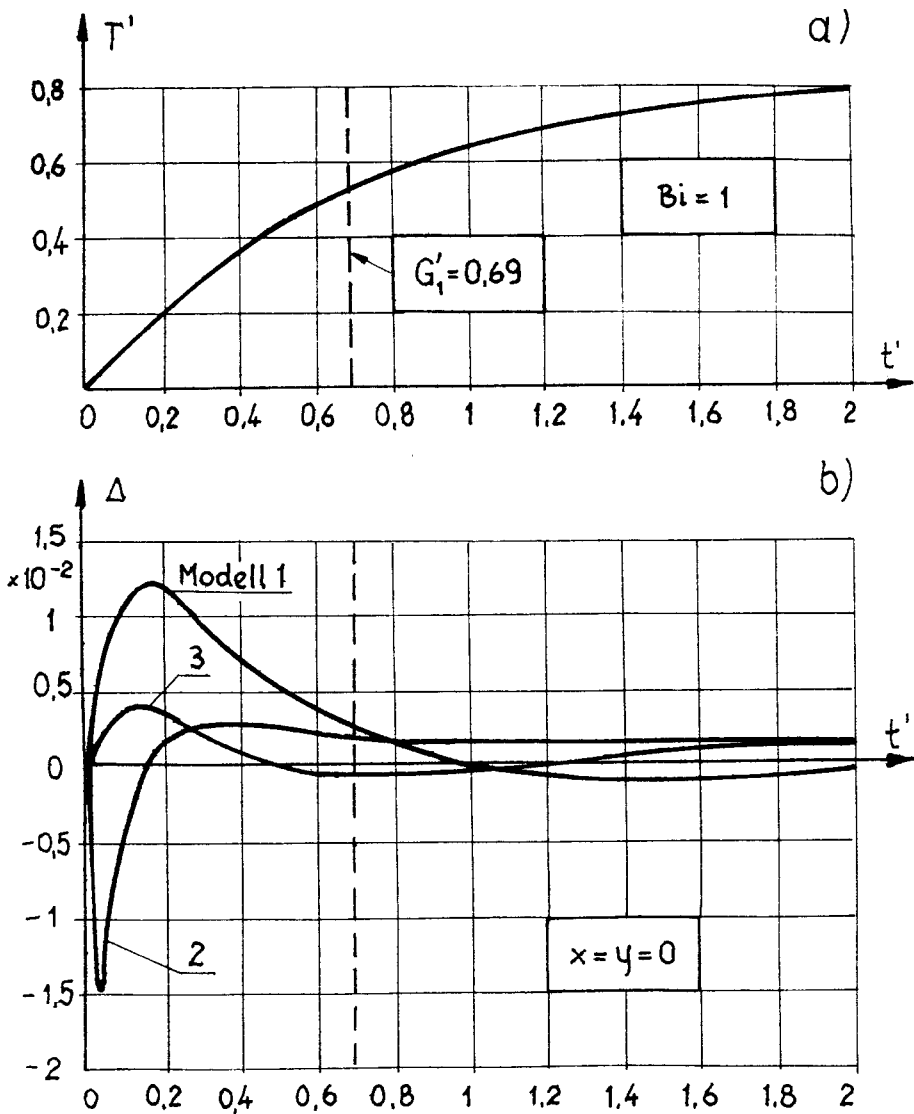


Bild 6.3. Abhängigkeit a) des normierten exakten Verlaufs $T' = T \lambda / (q_v a^2)$; b) des Absolutfehlers $\Delta = T'_a - T'$ von der Variablen $t' = t \alpha / a^2$ in der Mitte der Anordnung für $\operatorname{Bi} = 1$

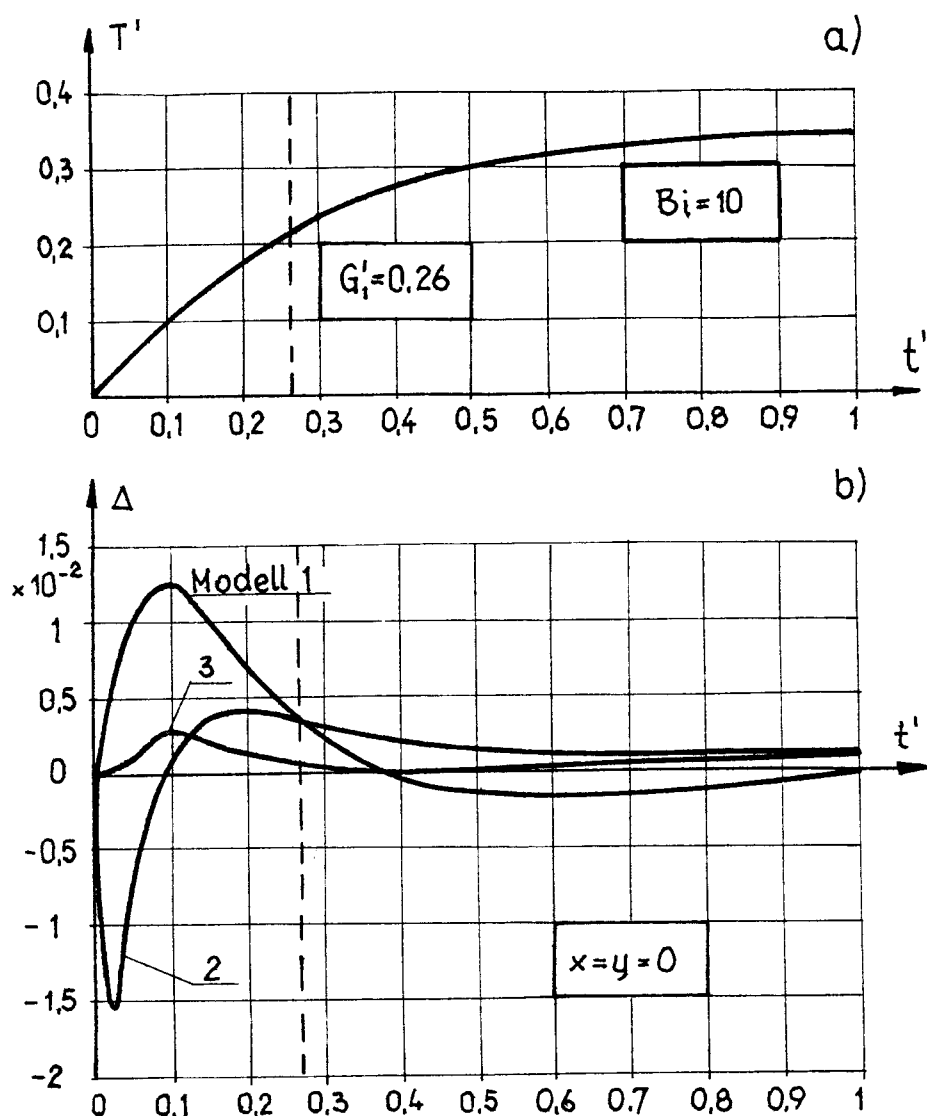


Bild 6.4. Abhängigkeit a) des normierten exakten Verlaufs $T' = T\lambda/(q_v a^2)$; b) des Absolutfehlers $\Delta = T'_a - T'$ von der Variablen $t' = tx/a^2$ in der Mitte der Anordnung für $Bi=10$

teilt. Bestimmt wurden der stationäre Zustand, sowie die Momente $G_1(P_i)$ und $G_2(P_i)$. Auf ihrer Grundlage wurden mit Hilfe der Tabelle 6.1 die Parameter der Übertragungsfunktionen folgender Übertragungselemente ermittelt:

- 1 - Proportionalglied mit Verzögerung 1. Ordnung,
- 2 - totzeitbehaftetes Proportionalglied mit Verzögerung 1. Ordnung,

3 - Proportionalglied mit Verzögerung m-ter Ordnung und entsprechend der Gl. (6.8) die angenäherten Verläufe $T_a(P_i, t)$ gewonnen. Die Ergebnisse der numerischen Rechnung für $a=b$ wurden mit der analytischen Lösung (6.39) verglichen und in den Bildern 6.3-6.4, sowie in den Tabellen 6.3-6.6 dargestellt. In den Bildern 6.3 und 6.4 wird die Abhängigkeit des exakten Verlaufs $T' = T\lambda/(q_v a^2)$ und des absoluten Fehlers $\Delta = T'_a - T'$, mit $T'_a = T_a\lambda/(q_v a^2)$, für die o.g. Übertragungselemente von der Variablen $t' = t\lambda/a^2$ gezeigt. Der größte Approximationsfehler tritt am Anfang des Ausgleichsvorgangs auf, wobei die besten Ergebnisse mit Hilfe des 3. Modells erreicht wurden. Der Absolutfehler der Näherung hat in diesem Fall einen Maximalwert von +0,0040, d.h. +2,7% (bezogen auf den analytischen Wert) für $Bi=1$ und +0,0027, d.h. 2,7%, für $Bi=10$. Bei der Anwendung des einfachsten 1. Modells haben die Ergebnisse erwartungsgemäß einen Maximalfehler von +0,0120 (+8,1%) und +0,0125 (+12,6%).

Wie man aus den Bildern 6.3 und 6.4 sieht, werden die Bedingungen (6.9) durch die Näherungslösungen $T_a(x, y, t)$ nicht erfüllt. Die Ursache dieser Nichtübereinstimmung liegt darin, daß der Verlauf $T_a(x, y, t)$ nicht aus der Gl. (6.8) sondern aus der Beziehung

$$T_a(x, y, t) = T_a(x, y, 0) + [T_a(x, y, \infty) - T_a(x, y, 0)]h_a(x, y, t), \quad (6.40)$$

bestimmt wurde. Beide Verläufe T und T_a erfüllen zwar die homogene Anfangsbedingung, aber die Funktion T_a im Endzustand ($t \rightarrow \infty$) wurde numerisch, also mit einem gewissen Fehler ermittelt. Der Fehler war im betrachteten Fall verhältnismäßig klein: 0,2% für $Bi=1$ und 0,4% für $Bi=10$.

Um eine bestimmte Übertragungsfunktion gewinnen zu können, müssen durch die Momente G_k gewisse Bedingungen erfüllt werden, die sich aus der Forderung, daß die Zeitkonstanten (siehe Tabelle 6.1) reel und positiv sein müssen, ergeben. Zum Beispiel sollen für die betrachteten Übertragungselemente 2 und 3 folgende Ungleichungen gelten

$$G_1^2 < G_2 \leq 2G_1^2, \quad \text{für das Modell 2,} \quad (6.41)$$

$$G_1^2 < G_2, \quad \text{für das Modell 3.} \quad (6.42)$$

Die weniger strenge Bedingung durch die Ungleichung (6.42) zeugt

von besserer "Approximationsfähigkeit" des 3. Modells. Weil die Momente G_1 und G_2 ortsabhängig sind, kann in einem Raumpunkt die Bedingung (6.41) und in einem anderen nur die Bedingung (6.42) erfüllt werden. Der erste Fall bedeutet, daß jedes Modell (1 bis 3) "approximationsfähig" ist. In der Tabelle 6.3a-b ist der Anwendungsbereich von approximierenden Übertragungsfunktionen für das vorliegende Beispiel dargestellt.

Tabelle 6.3. Untersuchung des Anwendungsbereiches von approximierenden Übertragungsfunktionen

Bezeichnungen:

- - im Punkt (x,y) ist die Bedingung (6.41) erfüllt,
- - im Punkt (x,y) ist die Bedingung (6.42) erfüllt.

a) $Bi = 1$

y/b	x/a										
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1.0	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
0.9	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
0.8	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
0.7	■	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
0.6	■	■	■	■	□	□	□	□	□	□	□
0.5	■	■	■	■	■	□	□	□	□	□	□
0.4	■	■	■	■	■	■	□	□	□	□	□
0.3	■	■	■	■	■	■	■	□	□	□	□
0.2	■	■	■	■	■	■	■	□	□	□	□
0.1	■	■	■	■	■	■	■	■	□	□	□
0.0	■	■	■	■	■	■	■	■	□	□	□

b) $Bi = 10$

y/b	x/a										
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1.0	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
0.9	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
0.8	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
0.7	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
0.6	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
0.5	■	■	■	■	□	□	□	□	□	□	□
0.4	■	■	■	■	■	□	□	□	□	□	□
0.3	■	■	■	■	■	■	□	□	□	□	□
0.2	■	■	■	■	■	■	□	□	□	□	□
0.1	■	■	■	■	■	■	□	□	□	□	□
0.0	■	■	■	■	■	■	□	□	□	□	□

Wie die Bilder 6.3 und 6.4 sowie die Tabelle 6.3a-b beweisen, zeichnet sich das 3. Modell durch folgende Vorteile aus:

- es ist im ganzen Grundgebiet $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ "approximationsfähig",
- mit seiner Hilfe kann man eine recht gute Näherung T_a des wirklichen Verlaufs bestimmen.

Die Wirksamkeit des 3. Modells wird auch durch die Tabellen 6.4- 6.6 bestätigt. In den Tabellen 6.4-6.6 wird die räumliche Verteilung des relativen Fehlers (in [%]) bei der Anwendung des 1. und des 3. Modells für $t' = 0,2; 0,4; 0,6$ und $Bi=1$ angegeben. Die normierte mittlere Zeitkonstante hat in diesem Fall einen Wert von 0,69 bis 0,64. Man kann bemerken, daß dank der Verwendung des 3. Modells der Approximationsfehler im ganzen Gebiet sich wesentlich reduziert.

Tabelle 6.4. Verteilung des relativen Fehlers $(T_a - T)/T$ [%], für $t^* = 0,2$ mit Verwendung: a) 1. Modells; b) 3. Modells

a)

y/b	x/a											
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
1.0	-1.8	-1.9	-2.2	-2.8	-3.5	-4.5	-5.5	-6.5	-7.5	-8.3	-8.6	
0.9	-1.5	-1.6	-1.9	-2.5	-3.2	-4.1	-5.2	-6.2	-7.2	-7.9	-8.3	
0.8	-0.6	-0.7	-1.1	-1.7	-2.4	-3.4	-4.4	-5.5	-6.4	-7.2	-7.5	
0.7	0.5	0.4	-0.0	-0.6	-1.4	-2.4	-3.4	-4.5	-5.5	-6.2	-6.5	
0.6	1.7	1.5	1.1	0.5	-0.3	-1.3	-2.3	-3.4	-4.4	-5.2	-5.5	
0.5	2.8	2.7	2.3	1.7	0.8	-0.2	-1.3	-2.4	-3.4	-4.1	-4.5	
0.4	3.9	3.7	3.3	2.7	1.8	0.8	-0.3	-1.4	-2.4	-3.2	-3.5	
0.3	4.8	4.6	4.2	3.5	2.7	1.7	0.5	-0.6	-1.7	-2.5	-2.8	
0.2	5.4	5.3	4.9	4.2	3.3	2.3	1.2	-0.0	-1.1	-1.9	-2.2	
0.1	5.9	5.7	5.3	4.6	3.7	2.7	1.5	0.4	-0.7	-1.6	-1.9	
0.0	6.1	5.9	5.4	4.8	3.9	2.8	1.7	0.5	-0.6	-1.5	-1.8	

b)

y/b	x/a											
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
1.0	-0.5	-0.5	-0.5	-0.7	-0.9	-1.1	-1.4	-1.6	-1.8	-2.0	-2.1	
0.9	-0.4	-0.4	-0.5	-0.6	-0.8	-1.0	-1.3	-1.6	-1.8	-1.9	-2.0	
0.8	-0.1	-0.1	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1.1	-1.4	-1.6	-1.8	-1.8	
0.7	0.2	0.2	0.1	-0.1	-0.3	-0.6	-0.9	-1.1	-1.4	-1.6	-1.6	
0.6	0.6	0.5	0.4	0.2	-0.0	-0.3	-0.6	-0.9	-1.1	-1.3	-1.4	
0.5	0.9	0.8	0.7	0.5	0.3	0.0	-0.3	-0.6	-0.8	-1.0	-1.1	
0.4	1.2	1.1	1.0	0.8	0.6	0.3	-0.0	-0.3	-0.6	-0.8	-0.9	
0.3	1.4	1.4	1.3	1.1	0.8	0.5	0.2	-0.1	-0.4	-0.6	-0.7	
0.2	1.6	1.6	1.5	1.3	1.0	0.7	0.4	0.1	-0.2	-0.5	-0.5	
0.1	1.8	1.7	1.6	1.4	1.1	0.8	0.5	0.2	-0.1	-0.4	-0.5	
0.0	1.8	1.8	1.6	1.4	1.2	0.9	0.6	0.2	-0.1	-0.4	-0.5	

Tabelle 6.5. Verteilung des relativen Fehlers $(T_a - T)/T$ [%],
für $t' = 0,4$ mit Verwendung: a) 1. Modells; b) 3. Modells

a)

y/b	x/a											
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
1.0	-0.6	-0.6	-0.6	-0.8	-1.1	-1.3	-1.7	-2.0	-2.3	-2.6	-2.7	
0.9	-0.4	-0.5	-0.5	-0.7	-1.0	-1.3	-1.6	-1.9	-2.2	-2.5	-2.6	
0.8	-0.1	-0.2	-0.3	-0.5	-0.7	-1.0	-1.4	-1.7	-2.0	-2.2	-2.3	
0.7	0.2	0.2	0.0	-0.2	-0.4	-0.7	-1.1	-1.4	-1.7	-1.9	-2.0	
0.6	0.6	0.5	0.4	0.2	-0.1	-0.4	-0.7	-1.1	-1.4	-1.6	-1.7	
0.5	0.9	0.9	0.8	0.6	0.3	-0.0	-0.4	-0.7	-1.0	-1.3	-1.3	
0.4	1.3	1.2	1.1	0.9	0.6	0.3	-0.1	-0.4	-0.7	-1.0	-1.1	
0.3	1.6	1.5	1.4	1.2	0.9	0.6	0.2	-0.2	-0.5	-0.7	-0.8	
0.2	1.8	1.8	1.6	1.4	1.1	0.8	0.4	0.0	-0.3	-0.5	-0.6	
0.1	2.0	1.9	1.8	1.5	1.2	0.9	0.5	0.2	-0.2	-0.5	-0.6	
0.0	2.1	2.0	1.8	1.6	1.3	0.9	0.6	0.2	-0.1	-0.4	-0.6	

b)

y/b	x/a										
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.9	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.8	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1
0.6	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1
0.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1
0.4	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.3	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.1	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0
0.0	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0

Tabelle 6.6. Verteilung des relativen Fehlers $(T_a - T)/T$ [%], für $t' = 0,6$ mit Verwendung: a) 1. Modells; b) 3. Modells

a)

y/b	x/a											
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
1.0	-0.2	-0.1	-0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.6	
0.9	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.3	-0.4	-0.5	-0.5	-0.6	
0.8	0.0	-0.0	-0.0	-0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.4	-0.5	-0.5	
0.7	0.1	0.1	0.1	0.0	-0.0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.4	-0.4	
0.6	0.2	0.2	0.2	0.1	0.0	-0.0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.3	-0.3	
0.5	0.3	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1	-0.0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.3	
0.4	0.4	0.4	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	-0.0	-0.1	-0.2	-0.2	
0.3	0.5	0.5	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	-0.1	-0.1	-0.1	
0.2	0.6	0.6	0.5	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	-0.0	-0.1	-0.1	
0.1	0.7	0.6	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	-0.1	-0.1	
0.0	0.7	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	-0.1	-0.2	

b)

y/b	x/a											
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
1.0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.5	0.5	
0.9	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5	0.5	
0.8	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5	
0.7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	
0.6	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	
0.5	-0.0	-0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	
0.4	-0.0	-0.0	-0.0	-0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	
0.3	-0.1	-0.1	-0.1	-0.0	-0.0	0.0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	
0.2	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.2	0.2	
0.1	-0.0	-0.1	-0.1	-0.1	-0.0	-0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	
0.0	-0.0	-0.0	-0.1	-0.1	-0.0	-0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	

7. PRAKTISCHE ANWENDUNGEN

7.1. Allgemeines

Zur Erläuterung und Überprüfung vorgeschlagener Algorithmen wurden in den vorigen Kapiteln Berechnungsbeispiele mit exakter analytischer Lösung ausgewählt. In diesem Kapitel werden einige praktisch relevante Beispiele nichtstationärer elektromagnetischer und Wärmefelder dargestellt. Da für die im weiteren betrachteten Feldprobleme keine analytische Lösung vorhanden ist, wird die Methode der finiten Elemente angewandt, wobei die räumlich offenen Randwertaufgaben mit einfachen infiniten Elementen behandelt werden. Um die dynamische Prozesse möglichst vollkommen untersuchen zu können, wird numerisch neben der mittleren Zeitkonstanten, sowie des ihr entsprechenden angenäherten Verlaufs, auch die tatsächliche Sprungantwort bestimmt, wozu die komplexe Helmholtz-Differentialgleichung im Frequenzbereich analysiert wird.

Behandelt werden u.a. Probleme der Abschirmung von quasistationären elektromagnetischen Feldern. Da man beim quasistationären Feld die Verschiebungsströme gegenüber den Leitungsströmen vernachlässigen kann, entspricht dieser Fall genau der Abschirmproblematik bei starkstromtechnisch real in der Industrie vorhandenen Feldern. In diesen Fällen wird die Frequenzanalyse im niederfrequenten Bereich durchgeführt. Bei den "nachrichtentechnischen" Schirmungsproblemen (z.B. Kaden [44]) gilt diese Vernachlässigung nicht mehr, weil man infolge der hohen Frequenzen ([MHz]) Wellenerscheinungen berücksichtigen müßte.

Als weitere Beispiele für die praktische Anwendung werden das nichtstationäre elektromagnetische Feld in einem Gleichstrommagnet und das nichtstationäre Temperaturfeld in einem "Witterungsfühler" betrachtet.

Der Inhalt des Kapitels wurde teilweise in früheren Arbeiten [11,14,16,19,23] des Verfassers veröffentlicht.

7.2. Analyse der Ausgleichsvorgänge in elektromagnetischen Abschirmungen

7.2.1. Das elektromagnetische Feld in einer Kastenabschirmung

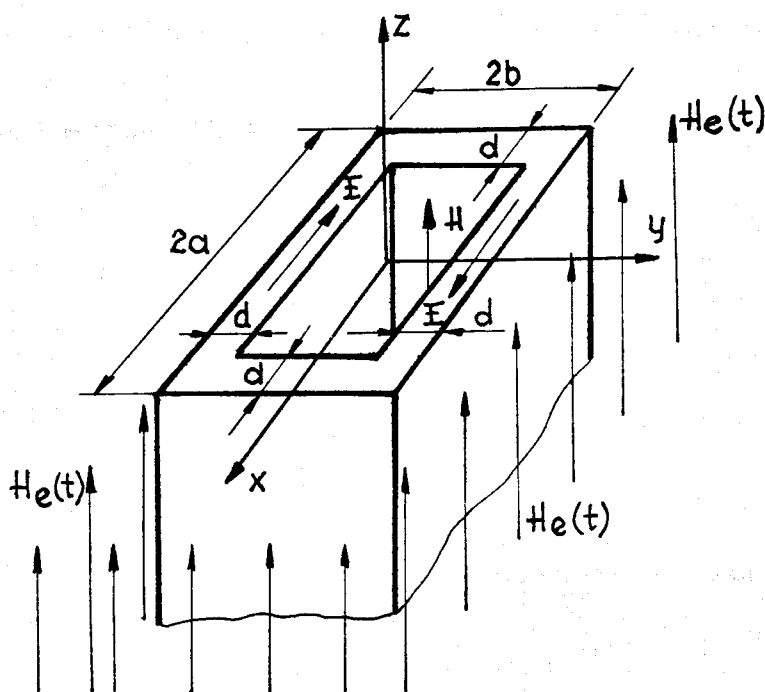


Bild 7.1. Kastenabschirmung im homogenen Erregerfeld

Eine leitende elektromagnetische Kastenabschirmung der Leitfähigkeit γ befindet sich in einem homogenen Erregerfeld $\mathbf{H} = \mathbf{1}_z \cdot H_e$. Die Geometrie der Anordnung und das kartesische Koordinatensystem sind im Bild 7.1 dargestellt. Es wird eine große Länge l der Abschirmung gegenüber den Querschnittsabmessungen vorausgesetzt und die Anordnung wird zweidimensional betrachtet. Zur Feldbeschreibung kann die z -Komponente der magnetischen Feldstärke H verwendet werden. Die Permeabilität der angegebenen Anordnung weist überall den konstanten Wert μ_0 auf und das Randwertproblem für die Feldverteilung wird durch die Differentialgleichung (2.14) im leitenden und eine Laplace-Differentialgleichung im nichtleitenden Gebiet beschrieben. Die Randbedingungen dieser Aufgabe lauten:

$$H(\pm a, y, t) = H(x, \pm b, t) = H_e(t) . \quad (7.1)$$

Numerische Lösung

Die numerische Rechnung wurde mit Hilfe des FE-Verfahrens durchgeführt, wobei das betrachtete Grundgebiet $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ in 288 lineare finite Dreieckselemente (169 Elementeknoten) zerlegt wurde. Bei der Berechnung wurde $a=b$ angenommen. Im Bild 7.2 wird die räumliche Verteilung der normierten mittleren Zeitkonstante der magnetischen Feldstärke $\tau' = \tau/T$ mit $T = \mu_0 \gamma a^2$ dargestellt. Die Zeitkonstante wurde nach dem im Bild 5.3 angegebenen Algorithmus bestimmt.

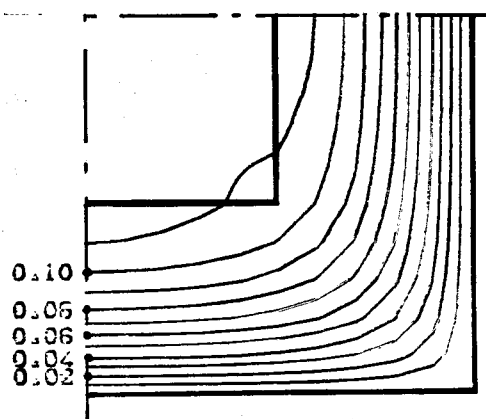
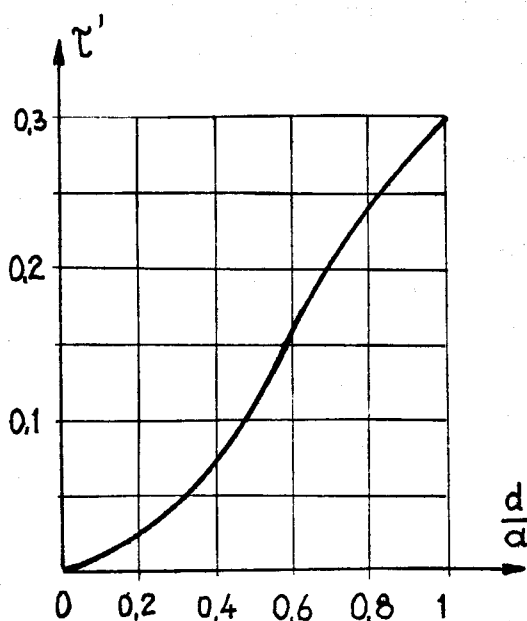


Bild 7.2. Verteilung der normierten Zeitkonstante in einem Viertel der Kastenabschirmung ($a=b$; $d=a/2$)

Bild 7.3. Abgängigkeit der normierten Zeitkonstante von der relativen Wandstärke d/a ($a=b$; $x=y=0$)



In der Mitte der Anordnung nimmt die normierte Zeitkonstante einen Wert von $\tau' = 0,114$ an. Wird z.B. die Abschirmung aus Kupfer ($\gamma = 5,7 \cdot 10^7$ [S/m]) angefertigt, wobei $a = 2$ [cm] ist, so

ergibt sich $T = 28,65$ [ms] und $\tau = 3,27$ [ms] an der genannten Stelle. Im Bild 7.3 ist die Abhängigkeit der normierten Zeitkonstante in der Mitte der Anordnung von der relativen Wandstärke d/a präsentiert. Mit $d/a = 1$ erhält man die Zeitkonstante $\tau = 0,295$ eines Massivstabes. Für einen Kupferstab mit der Abmessung $a = 2$ [cm] ergibt sich $\tau = 8,44$ [ms].

Um das dynamische Verhalten des magnetischen Feldes in der Abschirmung im Frequenzbereich beschreiben zu können, soll im leitenden Gebiet die komplexe Helmholtz- (siehe Abschnitt 6.3.2)

$$\Delta \underline{H} = j\omega \mu_0 \gamma \underline{H} \quad (7.2)$$

und im Inneren der Abschirmung die Laplace-Differentialgleichung

$$\Delta \underline{H} = 0 \quad (7.3)$$

für eine Reihe von Kreisfrequenzen ω gelöst werden. Mit dem so gewonnenen Frequenzgang $\underline{E}(j\omega T) = \underline{H}(j\omega T)/H_e$, kann man mit Hilfe der Beziehung (2.15) die tatsächliche Sprungantwort ermitteln. Wenn das Frequenzspektrum bandbegrenzt ist, kann man zur Bestimmung des Zeitverlaufes das im Beitrag [22] (Brykalski und Lipiński) vorgeschlagene Verfahren anwenden.

In den Bildern 7.4 und 7.5 werden die Ergebnisse der numerischen Untersuchung des dynamischen Verhaltens des magnetischen Feldes in der Mitte der Anordnung ($x=y=0$) gezeigt. Der Frequenzgang $\underline{E}(j\omega T)$, deren Ortskurve in Form einer charakteristischen Spiralschnecke dargestellt ist, entspricht einem komplexen Schirmfaktor. Bei $\omega \rightarrow \infty$ ergibt sich $\underline{E}(j\omega T) \rightarrow 0$, d.h. das elektromagnetische Feld wird im Inneren der Anordnung durch die im leitenden Gebiet induzierten Wirbelströme völlig abgeschirmt. Vom Abschirmverhalten zeugt auch die Sprungantwort, deren tatsächlicher totzeitbehafteter Verlauf (1) in den Bildern 7.4a und 7.5a präsentiert ist. Mit der Strichlinie (2) ist der angenäherte, mit Hilfe der mittleren Zeitkonstanten gewonnene Verlauf gezeichnet. Die Strichpunktlinie (3) stellt den Verlauf, welcher dem Übertragungselement mit Verzögerung m -ter Ordnung (siehe Abschnitt 6.2) zugeordnet ist, vor. Der entsprechende Absolutfehler Δ wird in den Bildern 7.4b und 7.5b dargestellt.

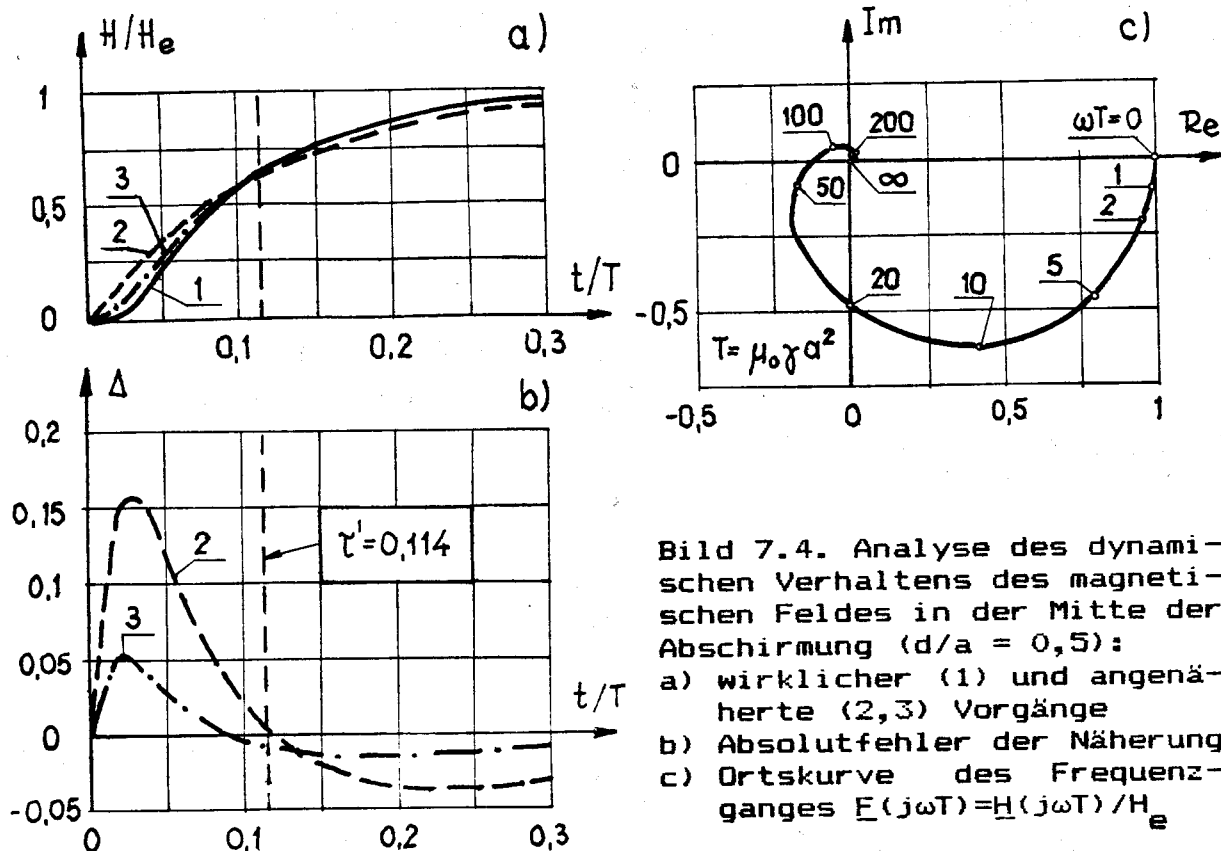


Bild 7.4. Analyse des dynamischen Verhaltens des magnetischen Feldes in der Mitte der Abschirmung ($d/a = 0,5$):
a) wirklicher (1) und angenäherte (2,3) Vorgänge
b) Absolutfehler der Näherung
c) Ortskurve des Frequenzganges $\underline{E}(j\omega T) = \underline{H}(j\omega T)/H_e$

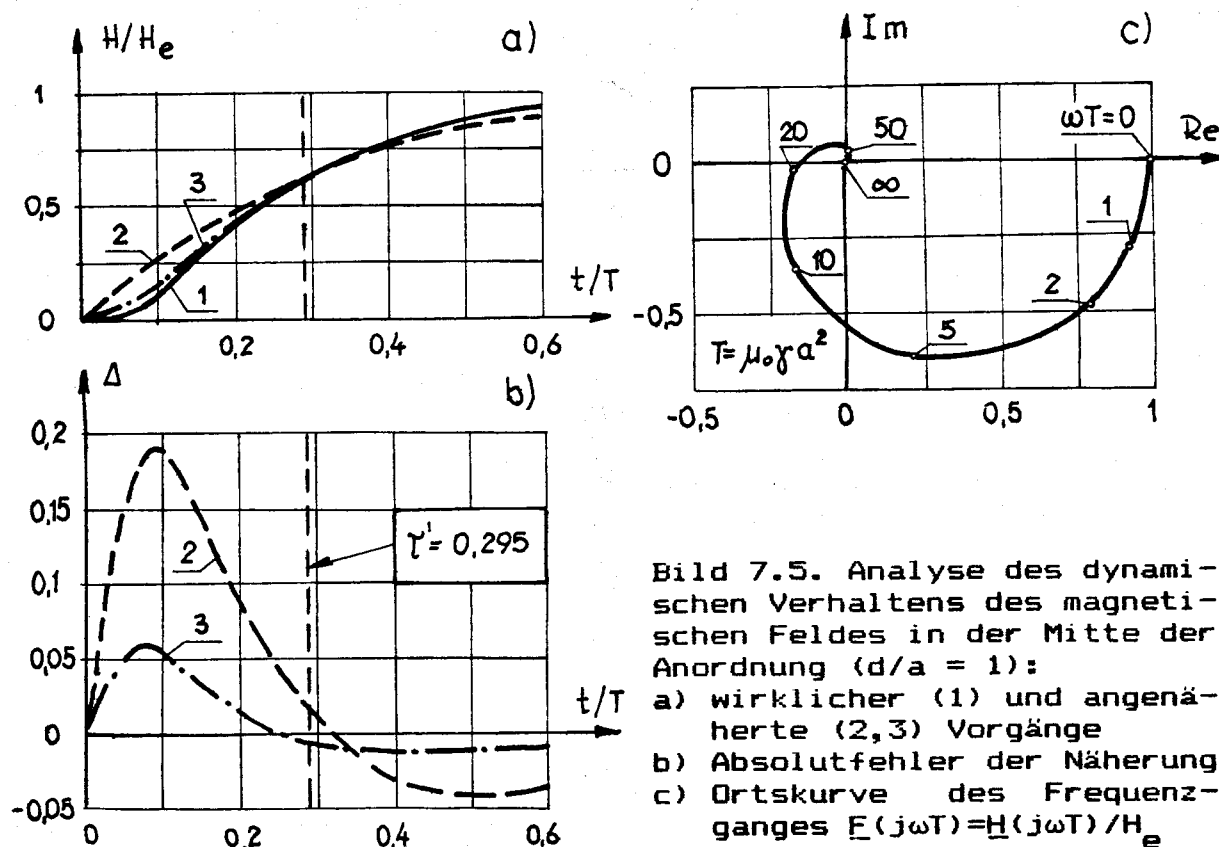


Bild 7.5. Analyse des dynamischen Verhaltens des magnetischen Feldes in der Mitte der Anordnung ($d/a = 1$):
a) wirklicher (1) und angenäherte (2,3) Vorgänge
b) Absolutfehler der Näherung
c) Ortskurve des Frequenzganges $\underline{E}(j\omega T) = \underline{H}(j\omega T)/H_e$

7.2.2. Das elektromagnetische Feld in einer axialsymmetrischen Abschirmung

Eine zylindersymmetrische elektromagnetische Abschirmung der Leitfähigkeit γ und der Permeabilität μ_0 befindet sich im elektromagnetischen Feld eines stromdurchflossenen Leiters. Die Geometrie der Anordnung und die zylindrischen Koordinaten (r, ϕ, z) sind im Bild 7.6 dargestellt worden. Der Vektor der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} in der Abschirmung hat ebenso wie der Vektor des Erregerfeldes \mathbf{H}_e nur eine ϕ -Komponente, die die Laplace-Gleichung in Luft und die Diffusionsgleichung (2.14) im leitenden Raum erfüllt. Die Randbedingung der Aufgabe lautet: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_e(t) = i(t)/(2\pi r)$, wobei: $R_1 \leq r \leq R_2 \cap z \geq a \cup (r=R_1 \cup r=R_2) \cap -a \leq z \leq a$.

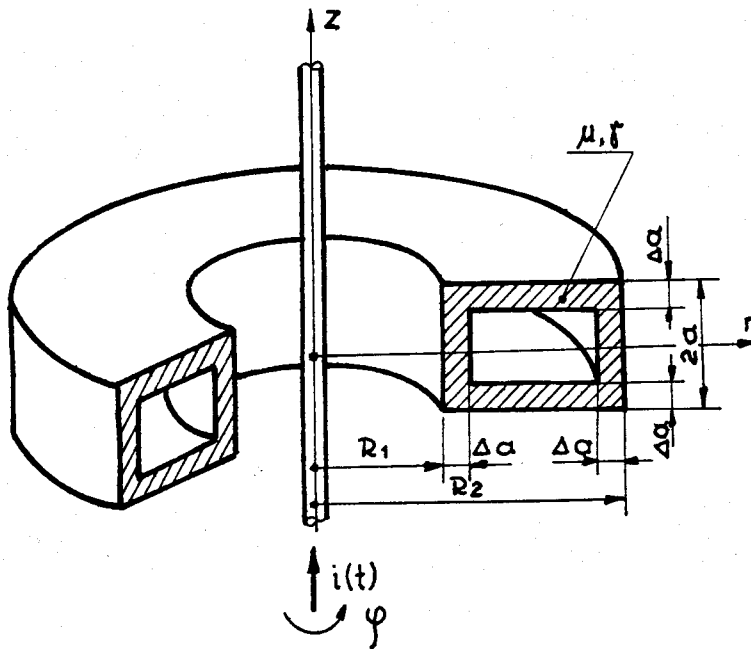


Bild 7.6. Eine axialsymmetrische elektromagnetische Abschirmung

Numerische Lösung

Die numerischen Rechnungen wurden mit Hilfe der FE-Methode durchgeführt, wobei das betrachtete Gebiet $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq z \leq a$ in 576 lineare finite Elemente (325 Elementeknoten) unterteilt wurde. Es wurden folgende Abmessungen der Abschirmung vorausgesetzt: $R_2 = 3R_1$; $R_1 = a$. Die Ergebnisse der Berechnungen werden in den Bildern 7.7-7.11 dargestellt.

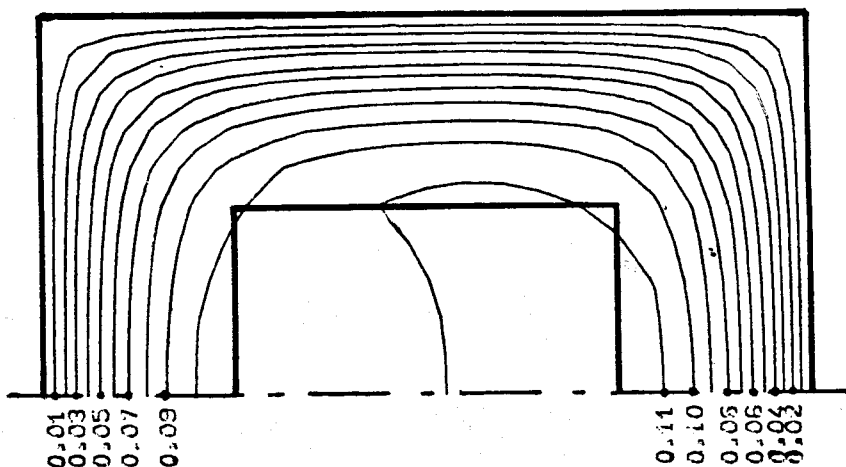


Bild 7.7. Verteilung der normierten Zeitkonstante τ' innerhalb der axialsymmetrischen Abschirmung

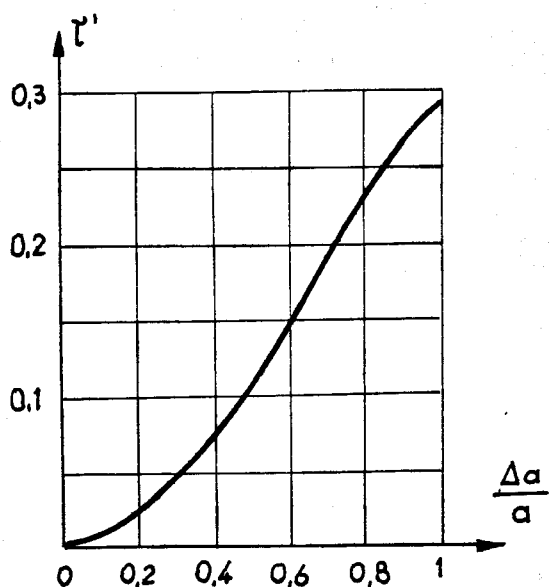


Bild 7.8. Abhängigkeit der normierten Zeitkonstante im Punkt $r=(R_1 + R_2)/2$; $z=0$ von der relativen Wandstärke $\Delta a/a$

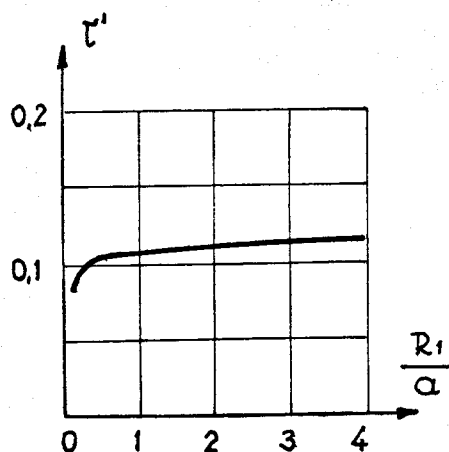


Bild 7.9. Abhängigkeit der normierten Zeitkonstante im Punkt $r=(R_1 + R_2)/2$; $z=0$ vom Verhältnis R_1/a

Im Bild 7.7 wird die räumliche Verteilung der normierten Zeitkonstante $\tau' = \tau/T$, mit $T = \mu_0 \gamma a^2$ gezeichnet. Im Punkt $r=(R_1 + R_2)/2$ $z=0$ wurde einen Wert von $\tau' = 0,110$ gewonnen, d.h. für $a = 2$ [cm] und $\gamma = 5,7 \cdot 10^7$ [S/m] ergibt sich $\tau = 3,15$ [ms]. Die Abhängigkeit der normierten Zeitkonstante vom Verhältnis $\Delta a/a$ wird im Bild 7.8 angegeben. Mit der Annahme $\Delta a/a=1$ erhält man $\tau' = 0,285$, d.h. $\tau = 8,16$ [ms]. Im Bild 7.9 wird die Abhängigkeit der nor-

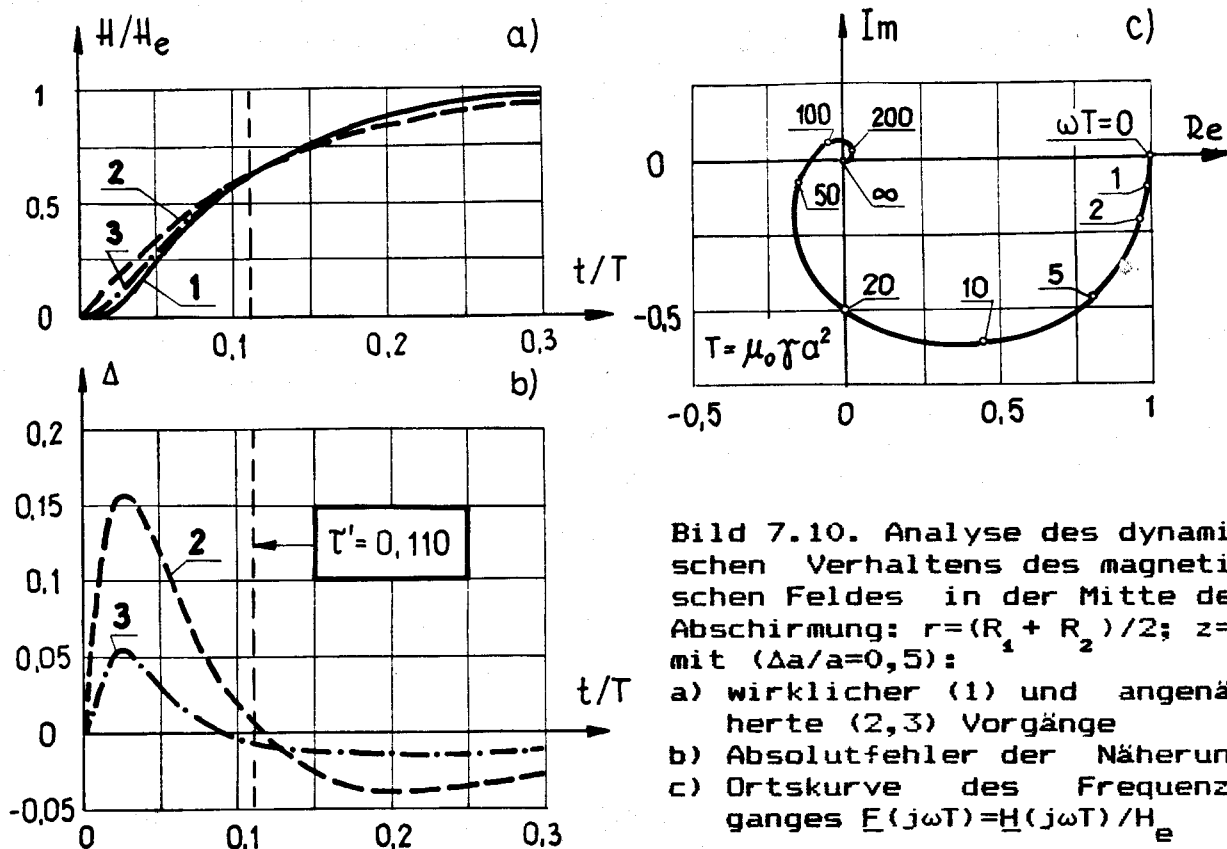


Bild 7.10. Analyse des dynamischen Verhaltens des magnetischen Feldes in der Mitte der Abschirmung: $r = (R_1 + R_2)/2$; $z=0$ mit $(\Delta a/a=0,5)$:

- a) wirklicher (1) und angenäherte (2,3) Vorgänge
b) Absolutfehler der Näherung
c) Ortskurve des Frequenzganges $E(j\omega T) = H(j\omega T)/H_e$

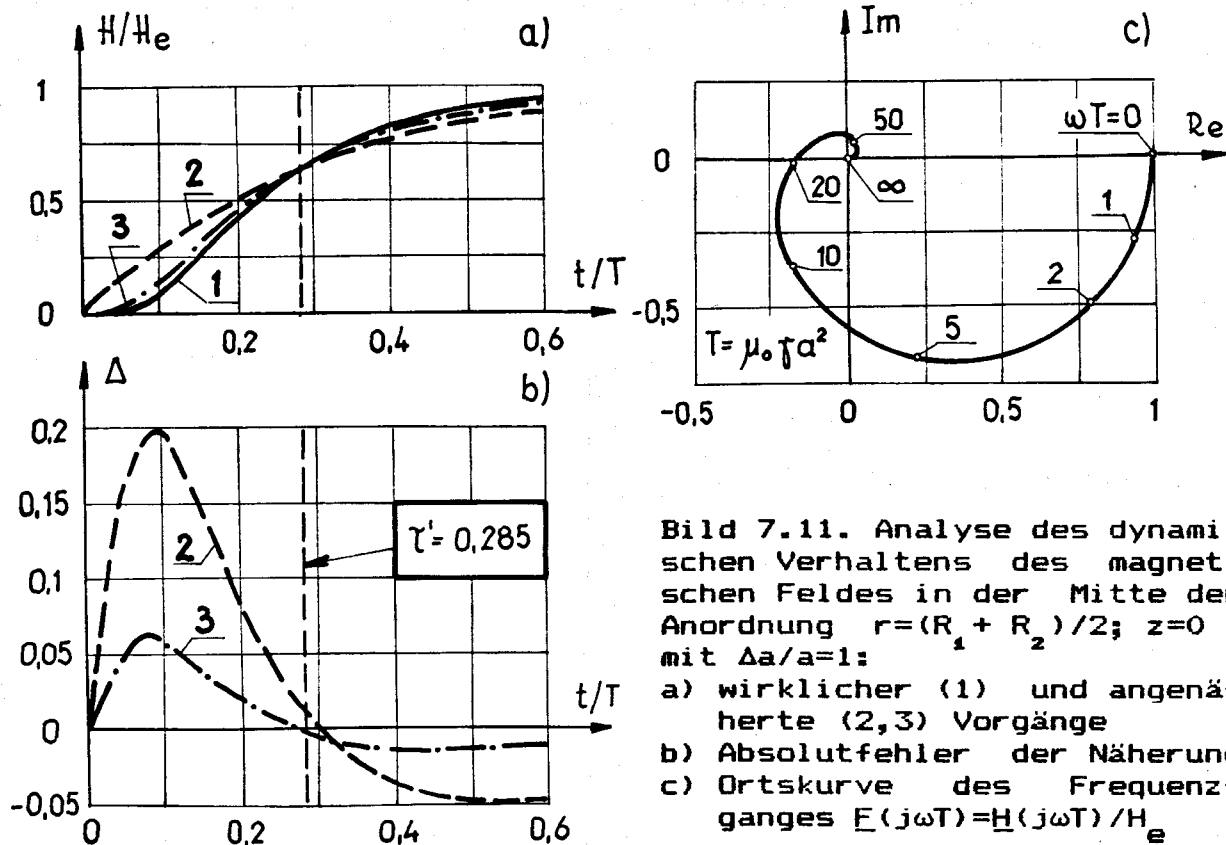


Bild 7.11. Analyse des dynamischen Verhaltens des magnetischen Feldes in der Mitte der Anordnung $r = (R_1 + R_2)/2$; $z=0$ mit $\Delta a/a=1$:

- a) wirklicher (1) und angenäherte (2,3) Vorgänge
b) Absolutfehler der Näherung
c) Ortskurve des Frequenzganges $E(j\omega T) = H(j\omega T)/H_e$

mierten Zeitkonstante in Punkt $r = (R_1 + R_2)/2$, $z=0$ vom Verhältnis R_1/a präsentiert. Im Grenzfall $R_1 \rightarrow \infty$ ergibt sich die Lösung für eine ebene rechteckförmige Abschirmung. In den Bildern 7.10a und 7.11a wird der Ausgleichsvorgang (1) der magnetischen Feldstärke im Inneren der Abschirmung bei sprunghafter Erregung, d.h. $i(t) = 1(t) \cdot I$, angegeben. Ergebnisse der numerischen Untersuchung im Frequenzbereich werden in den Bildern 7.10c und 7.11c im Form der Ortskurven dargestellt. Der Absolutfehler der gewonnenen approximierenden Verläufe (2-3) wird in den Bildern 7.10b und 7.11b angegeben. Zur Approximation wurden die Übertragungselemente erster (Verlauf 2) und m -ter Ordnung (Verlauf 3) angewandt.

7.2.3. Das elektromagnetische Feld bei einer halbgeschlossenen Abschirmung

Eine halbgeschlossene, elektromagnetische Abschirmung der Leitfähigkeit γ und der Permeabilität μ befindet sich im Feld eines von der Stromdichte $\mathbf{J} = \mathbf{1}_z \cdot J$ durchflossenen Doppelbandleitersystems (Bild 7.12). Das Doppelbandleitersystem besteht aus zwei parallelen, unendlich langen Leitern mit rechteckigem Querschnitt der Fläche S_0 . Die xz -Ebene bildet die Symmetrieebene der betrachteten Anordnung.

Zur Berechnung des vorliegenden Problems wird das Vektorpotential \mathbf{A} angewandt, daß hier nur die z -Komponente besitzt, welche in Luft die Laplace-Gleichung und in den leitenden Gebieten die Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial A}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial A}{\partial y} \right] = \begin{cases} \mu_0 \gamma_1 \frac{\partial A}{\partial t}, & \text{in der Abschirmung} \\ \mu_0 \gamma_2 \frac{\partial A}{\partial t} - \mu_0 J_e, & \text{in der Doppelleitung} \end{cases} \quad (7.4)$$

erfüllen muß, wobei $J_e = I/S_0$ die eingeprägte Stromdichte bedeutet. Die Dichte der in der Abschirmung induzierten Wirbelströme ist durch die Gleichung

$$\mathbf{J}_a = -\gamma_1 \frac{\partial A}{\partial t} \quad (7.5)$$

bestimmt. Für die beiden massiven Leiter gilt folgende Beziehung

$$J = J_0 - \gamma_2 \frac{\partial A}{\partial t} . \quad (7.6)$$

Zusätzlich muß die Nebenbedingung

$$\oint_{S_0} J \, dx dy = I \quad (7.7)$$

erfüllt werden.

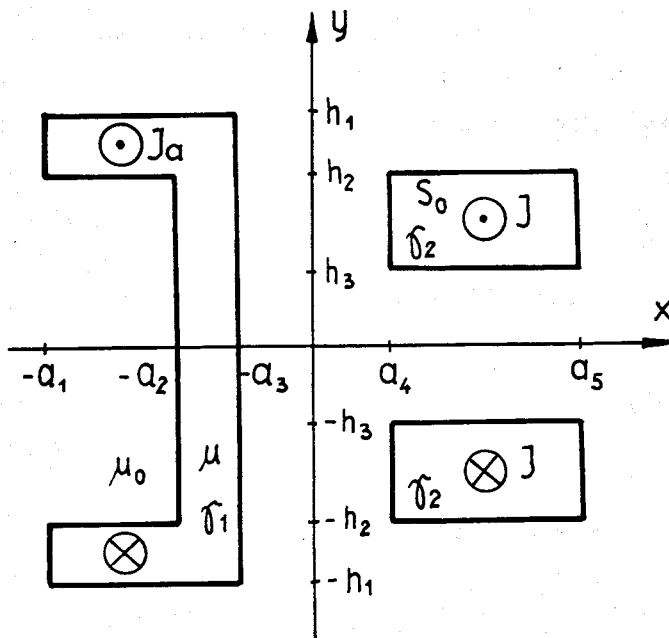


Bild 7.12. Eine halbgeschlossene Abschirmung im elektromagnetischen Feld des Doppelbandleitersystems

Numerische Lösung

Zur Bestimmung des magnetischen Feldes wurde das FE-Verfahren angewandt. Um den Rechenaufwand gering zu halten, wird die Symmetrie der Anordnung ausgenutzt. Entlang der Symmetrieachse gilt die homogene Dirichletsche Randbedingung (Bild 7.12). Da der Rand des betrachteten Gebietes eigentlich im Unendlichen liegt, muß bei der Berechnung mittels des FE-Verfahrens ein im Endlichen angenommener Rand verwendet werden, der das Gesamtgebiet in zwei Gebiete teilt: ein Innen- und ein Außengebiet. Das innere Gebiet wurde in 986 lineare, finite Dreieckselemente (540 Elementeknoten) diskretisiert. Das Verschwinden des magnetischen Vektorpotentials im Unendlichen wurde durch 63 infinite Elemente im Außengebiet berücksichtigt, wobei für n in $1/\rho^n$ (siehe Ab-

schnitt 4.2.4) die Zahl $n=1$ angenommen wurde. Diesem Wert entspricht zwar nicht das wirkliche Feldverhalten in Raum jedes infiniten Elementes, aber wie einige numerische Experimente bewiesen haben, erhält man damit die besten Ergebnisse auf der Symmetrieachse. Es wurde ebenfalls ein sehr geringer Einfluß des Wertes von n auf die numerische Lösung in der Nähe des Koordinatenursprunges bemerkt.

Die vorliegende Feldaufgabe wurde mit Hilfe des magnetischen Vektorpotentials A formuliert. Vom Interesse, besonders im abgeschirmten Raum, ist jedoch die magnetische Induktion, die in dem betrachteten, ebenen Fall durch die Beziehung

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{1}_x \cdot \frac{\partial A}{\partial y} - \mathbf{1}_y \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \quad (7.8)$$

bestimmt ist. Unter Berücksichtigung der Gestalt der verwendeten Formfunktionen (4.21) und des Approximationssatzes (4.15) erhält man die Komponenten des Vektors \mathbf{B} im Schwerpunkt eines finiten Elementes i, j, k :

$$B_x = (c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k) / (2\Delta), \quad (7.9)$$

$$B_y = -(b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k) / (2\Delta), \quad (7.10)$$

mit

$$c_i = x_k - x_j; \quad c_j = x_i - x_k; \quad c_k = x_j - x_i;$$

und

$$b_i = y_j - y_k; \quad b_j = y_k - y_i; \quad b_k = y_i - y_j;$$

wobei die A_i, A_j, A_k im allgemeinen die zeitabhängige Lösung der Feldaufgabe in den Elementeknoten darstellen.

Der Rechnung wurden folgenden Daten zugrunde gelegt (Bezeichnungen siehe Bild 7.12):

$$a_1 = 45 \text{ [mm]}, \quad a_2 = 20 \text{ [mm]}, \quad a_3 = 10 \text{ [mm]}, \quad a_4 = 10 \text{ [mm]},$$

$$h_1 = 50 \text{ [mm]}, \quad h_2 = 40 \text{ [mm]}, \quad h_3 = 20 \text{ [mm]},$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 5,7 \cdot 10^7 \text{ [S/m]}, \quad J_e = 10^6 \text{ [A/m}^2\text{]}.$$

Die Ergebnisse der numerischen Rechnungen werden in den Bildern 7.13–7.16 dargestellt. Wie im Bild 7.13 gezeigt wird, ist die mittlere Zeitkonstante im abgeschirmten Raum nur gering vom Ort abhängig. Der Zeitverlauf sowie der charakteristische Halbkreisbogen der Ortskurve (Bild 7.14) zeugen davon, daß sich das dynamische Verhalten der magnetischen Induktion im Inneren der

halbgeschlossenen Abschirmung ausreichend mit Hilfe eines Übertragungselementes 1. Ordnung beschreiben läßt. In den Bildern 7.15a-d ist der Einfluß der im Schirm induzierten Wirbelströme auf die Verteilung des elektromagnetischen Feldes dargestellt. Man kann dabei deutlich den Skin-Effekt in den beiden Bandleitern erkennen. Die Verteilung der magnetischen Induktion auf der Symmetrieachse ist im Bild 7.16 angegeben.

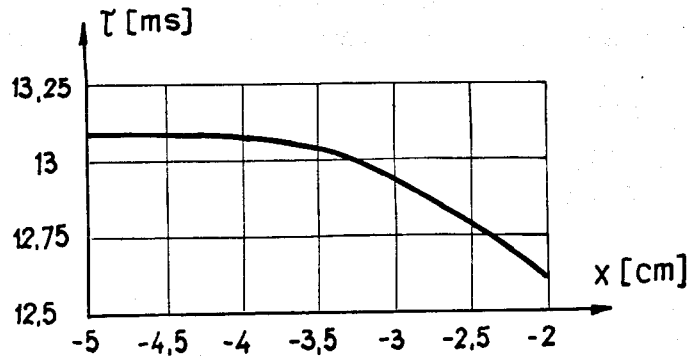


Bild 7.13. Verteilung der Zeitkonstanten der magnetischen Induktion im abgeschirmten Gebiet auf der Symmetrieachse

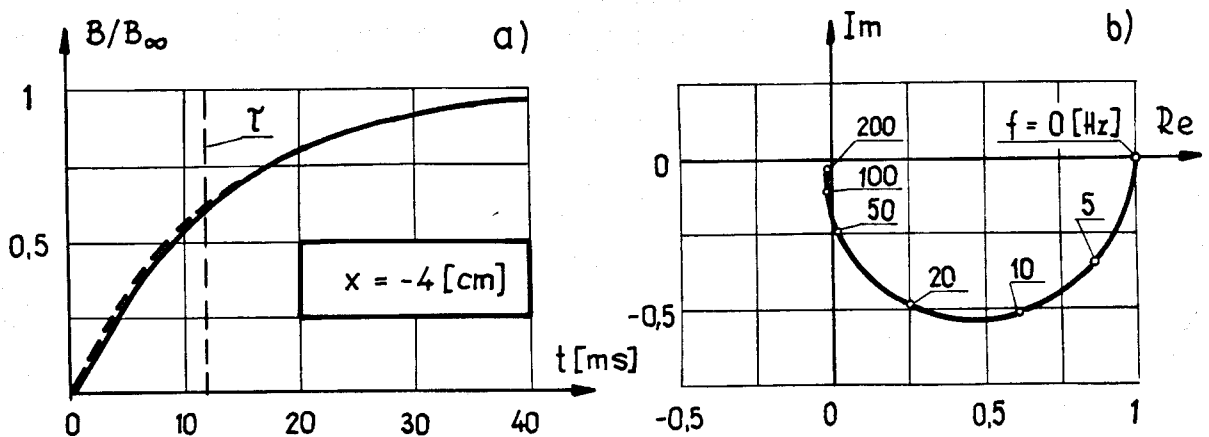


Bild 7.14. Dynamisches Verhalten der magnetischen Induktion im abgeschirmten Gebiet ($x = -4$ [cm]; $y = 0$ [cm])

- a) Sprungantwort;
- b) Ortskurve des Frequenzganges $\underline{E}(j\omega) = \underline{B}(j\omega) / \underline{B}(j\omega=0)$.

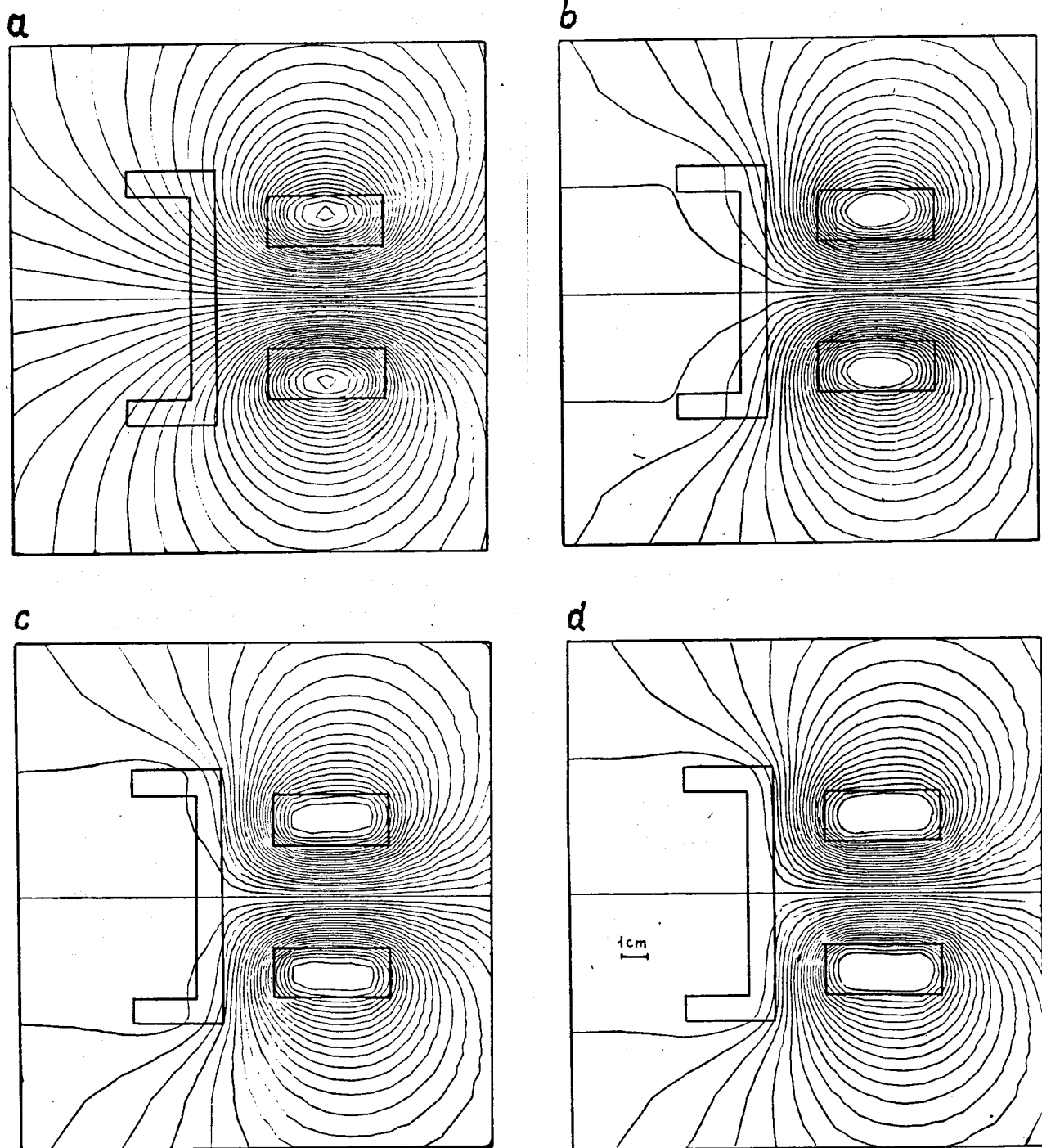


Bild 7.15. Abschirmung des elektromagnetischen Feldes bei einer zeitharmonischen Erregung. Dargestellt sind die Äquipotentiallinien $|A| = \text{const}$ mit einem Zuwachs $\Delta A = +0,1 \cdot 10^{-4}$ [Wb/m] für die Frequenzen:

- a) $f = 0$ [Hz]; $|A| = (0 \div 3,0) \cdot 10^{-4}$ [Wb/m];
- b) $f = 50$ [Hz]; $|A| = (0 \div 2,5) \cdot 10^{-4}$ [Wb/m];
- c) $f = 100$ [Hz]; $|A| = (0 \div 2,3) \cdot 10^{-4}$ [Wb/m];
- d) $f = 200$ [Hz]; $|A| = (0 \div 2,0) \cdot 10^{-4}$ [Wb/m].

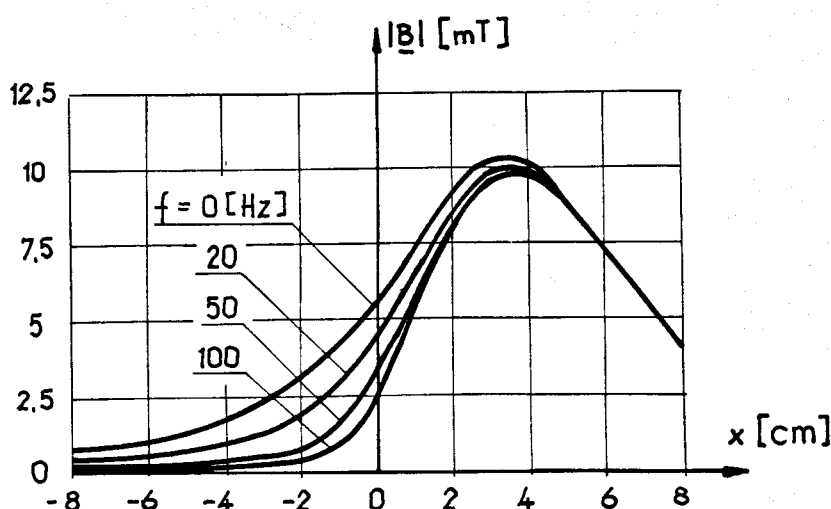


Bild 7.16. Verteilung der magnetischen Induktion auf der Symmetrieachse

7.2.4. Abschirmung von Zylinderspulen durch eine leitende Platte

Eine leitende Platte der Leitfähigkeit γ und der Permeabilität μ befindet sich im elektromagnetischen Feld einer Zylinderspule, deren aus dünnen Drähten bestehende N Wicklungen vom Strom $i(t)$ durchflossen werden. Die Geometrie der Anordnung ist in zylindersymmetrischen Koordinaten (r, ϕ, z) im Bild 7.17 dargestellt. In der Platte wird eine Wirbelstromdichte in ϕ -Richtung induziert und die magnetische Induktion verläuft in der rz -Ebene.

Zur Feldberechnung des vorliegenden Wirbelstromproblems wird das Vektorpotential $\mathbf{A} = \mathbf{1}_{\phi} \cdot A$ verwendet, das die Laplace-Gleichung in Luft, die Poissonsche Gleichung innerhalb der Spulenwicklung und die homogene Diffusionsgleichung in der Platte erfüllt, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r\mu_r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r\mu_r} \frac{\partial(rA)}{\partial z} \right] = \begin{cases} 0, & \text{in Luft} \\ -\mu_o J, & \text{in der Spule} \\ \mu_o \gamma \frac{\partial A}{\partial t}, & \text{in der Platte} \end{cases} \quad (7.11)$$

mit $J = Ni/S$ und $S = (h_1 - h_2) \cdot (R_2 - R_1)$.

Im Fall einer unendlich ausgedehnten Platte kann man mit Verwendung von Bessel- und Fourier-Integraltransformationen dieses

Problem analytisch Lösen (z.B. Lipiński [59]). Da die Abschirmplatte endliche Abmessungen hat, kann man das Problem nur numerisch behandeln.

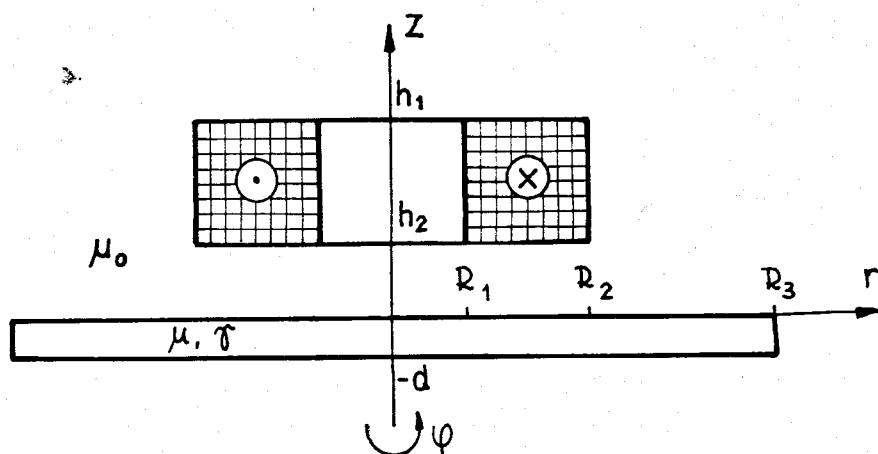


Bild 7.17. Abschirmplatte im Feld einer stromdurchflossenen Zylinderspule

Numerische Lösung

Bei der numerischen Lösung dieser Wirbelstromaufgabe wurde statt des Vektorpotentials eine für vektorielle axialsymmetrische Probleme übliche Hilfsfunktion $U = r \cdot A$ eingesetzt. Das durch einen künstlichen Rand begrenzte offene Feldgebiet wurde in 952 lineare finite Elemente (522 Elementeknoten) zerlegt. Zur Modellierung der Funktion U im unbegrenzten Außengebiet wurden 62 infinite Elemente mit dem Potenzexponent $(1/\rho^n)$ von $n=1$ verwendet.

Die durch den Wirbel von \mathbf{A} bestimmte magnetische Induktion lautet:

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = -\mathbf{1}_r \cdot \frac{\partial A}{\partial z} + \mathbf{1}_z \cdot \left[\frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right] = -\mathbf{1}_r \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} \right] + \mathbf{1}_z \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right]. \quad (7.12)$$

Daraus folgen die Komponenten des Vektors \mathbf{B} in einem finiten Element i, j, k :

$$B_r = -(c_i U_i + c_j U_j + c_k U_k) / (2\Delta r), \quad (7.13)$$

$$B_z = (b_i U_i + b_j U_j + b_k U_k) / (2\Delta r), \quad (7.14)$$

wobei die Koeffizienten b_m und c_m ($m = i, j, k$) der Formfunktionen

analog wie in der Gln (7.9–7.10) bestimmt werden. Dabei sollen statt x, y die Veränderlichen r, z entsprechend angenommen werden.

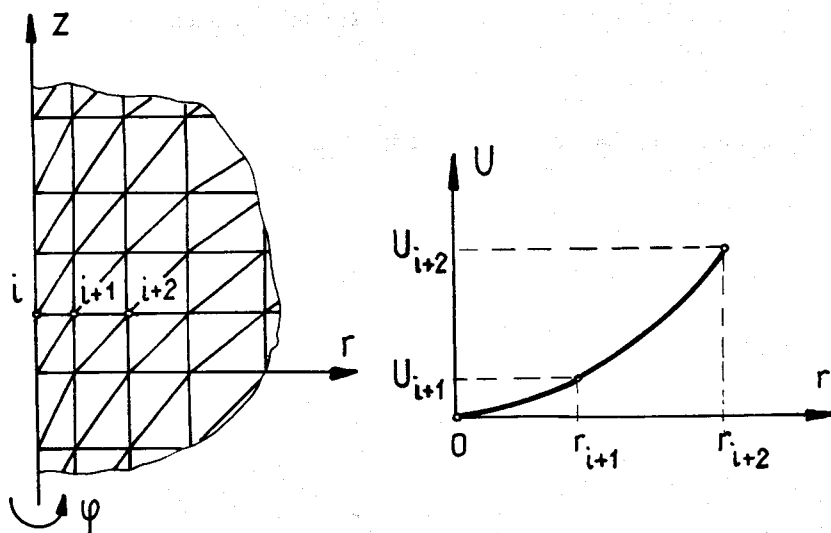


Bild 7.18. Quadratische Interpolation der Hilfsfunktion U in der Nähe der z -Achse

Auf der z -Achse ist die Randbedingung $A = 0$ und aus Symmetriegründen ist hier $B_r = 0$. Zur Berechnung der Komponente B_z auf der z -Achse wird statt der Gl. (7.14) folgende Beziehung

$$(B_z)_{r=0} = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right] = 2 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial A}{\partial r} \quad (7.15)$$

ausgenutzt. Bei der Verwendung von linearen finiten Dreieckselementen wird ebenfalls eine lineare Abhängigkeit der Funktion U in jedem Element gewonnen. Um die Ableitung $\partial A / \partial r$ für $r \rightarrow 0$ richtig ermitteln zu können, kann man eine quadratische Interpolation der diskreten Werten von U (Bild 7.18) durchführen. Die Funktion U läßt sich dann im Form des Interpolationssatzes

$$U(r, z = \text{const}) = p_1 r + p_2 r^2 \quad (7.16)$$

mit den Koeffizienten

$$p_1 = \frac{U_{i+2} r_{i+1}^2 - U_{i+1} r_{i+2}^2}{r_{i+1}^2 r_{i+2} - r_{i+1} r_{i+2}^2}, \quad p_2 = \frac{U_{i+1} r_{i+2} - U_{i+2} r_{i+1}}{r_{i+1}^2 r_{i+2} - r_{i+1} r_{i+2}^2}$$

darstellen. Unter Berücksichtigung den Gln (7.15–7.16) erhält man schließlich

$$(B_z)_{r=0} = 2 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) = 2 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} (p_1 + p_2 r) = 2p_2. \quad (7.17)$$

Die Beispiellösung wurde unter Annahme folgender Daten gefunden (Bezeichnungen siehe Bild 7.17):

$$R_1 = 20 \text{ [mm]}, R_2 = 40 \text{ [mm]}, R_3 = 100 \text{ [mm]},$$

$$h_1 = 65 \text{ [mm]}, h_2 = 20 \text{ [mm]}, d = 10 \text{ [mm]},$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]}, \gamma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ [S/m]}, J = 10^6 \text{ [A/m}^2\text{]}.$$

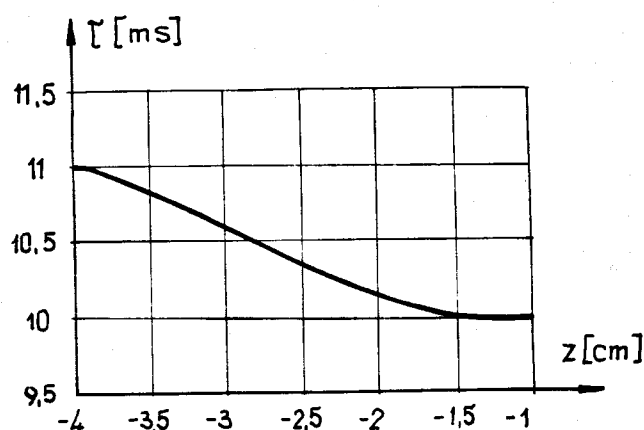


Bild 7.19. Verteilung der Zeitkonstante der magnetischen Induktion im abgeschirmten Gebiet auf der Symmetrieachse

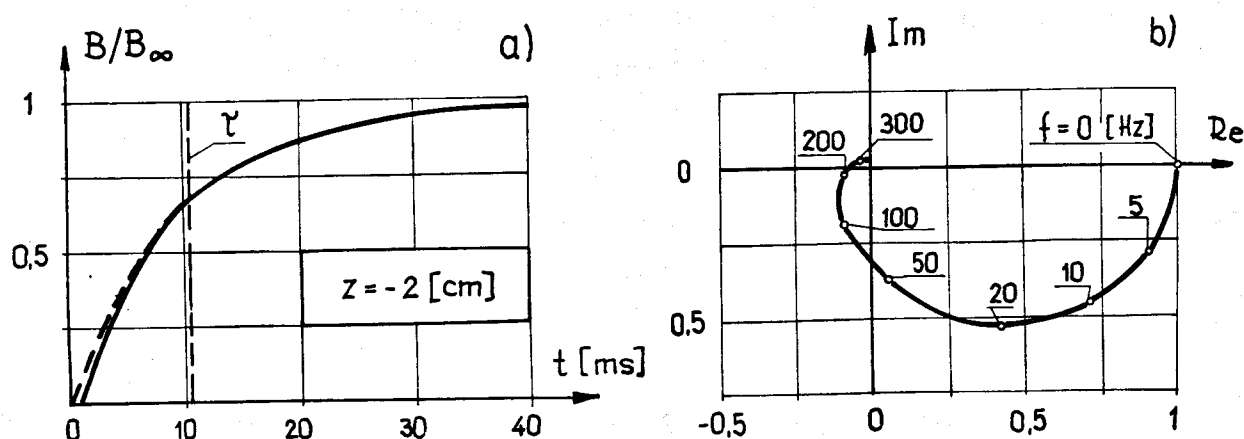


Bild 7.20. Dynamisches Verhalten der magnetischen Induktion im abgeschirmten Gebiet ($r = 0$ [cm], $z = -2$ [cm])

a) Sprungantwort;

b) Ortskurve des Frequenzganges $E(j\omega) = \underline{B}(j\omega)/\underline{B}(j\omega=0)$.

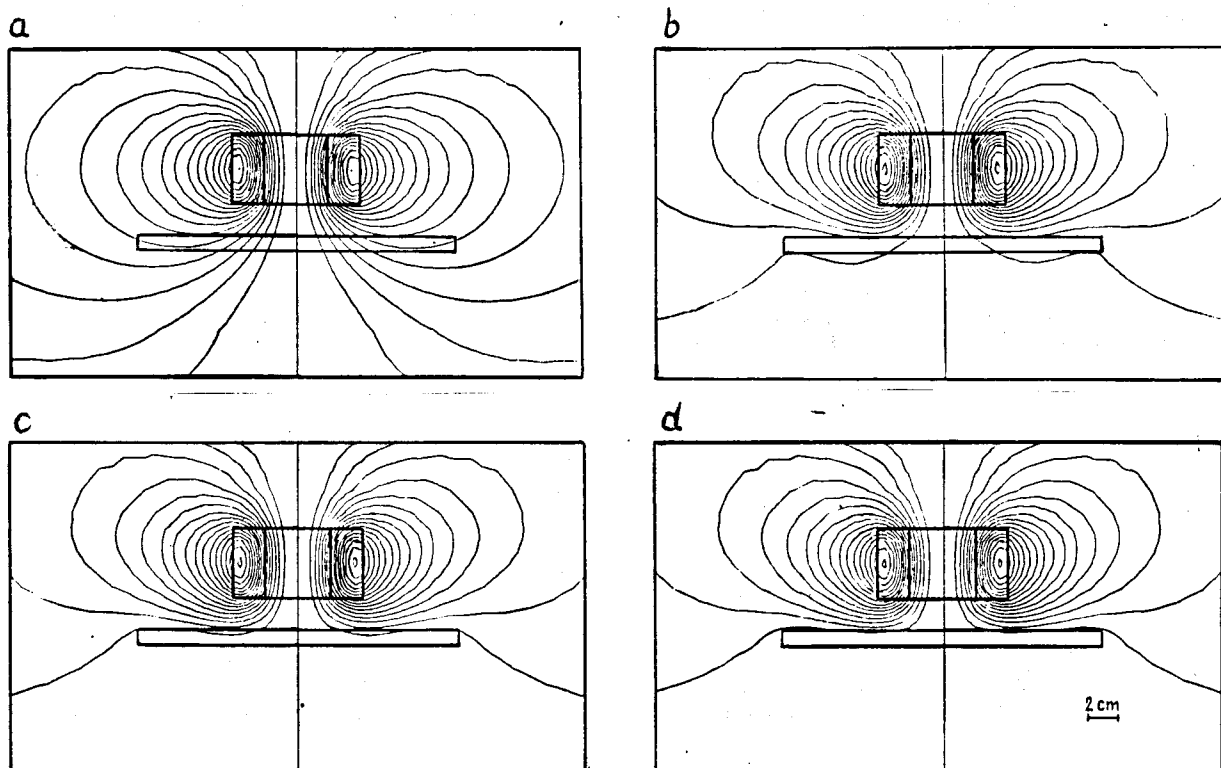


Bild 7.21. Abschirmung des elektromagnetischen Feldes bei einer zeitharmonischen Erregung durch eine leitende Platte. Dargestellt sind die Linien $|r \cdot A| = \text{const}$ mit einem Zuwachs $\Delta(r \cdot A) = +0,4 \cdot 10^{-6}$ [Wb] für die Frequenzen:

- a) $f = 0$ [Hz]; $|r \cdot A| = (0 \div 6,8) \cdot 10^{-6}$ [Wb];
- b) $f = 50$ [Hz]; $|r \cdot A| = (0 \div 6,4) \cdot 10^{-6}$ [Wb];
- c) $f = 100$ [Hz]; $|r \cdot A| = (0 \div 6,4) \cdot 10^{-6}$ [Wb];
- d) $f = 200$ [Hz]; $|r \cdot A| = (0 \div 6,4) \cdot 10^{-6}$ [Wb].

Die Ergebnisse der numerischen Rechnungen werden in den Bildern 7.19–7.22 gezeigt. Im Bild 7.19 ist die Abhängigkeit der mittleren Zeitkonstante der magnetischen Induktion im abgeschirmten Gebiet von der Veränderlichen z dargestellt. Das dynamische Verhalten der Induktion in einem Punkt des abgeschirmten Gebietes wurde mit Hilfe der Sprungantwort und der Ortskurve des Frequenzganges untersucht und im Bild 7.20 gezeigt. Das Abschirmverhalten bei einer zeitharmonischen Erregung wurde durch Lösung der Helmholtz-Differentialgleichung bestimmt und in den Bildern 7.21 und 7.22 illustriert.

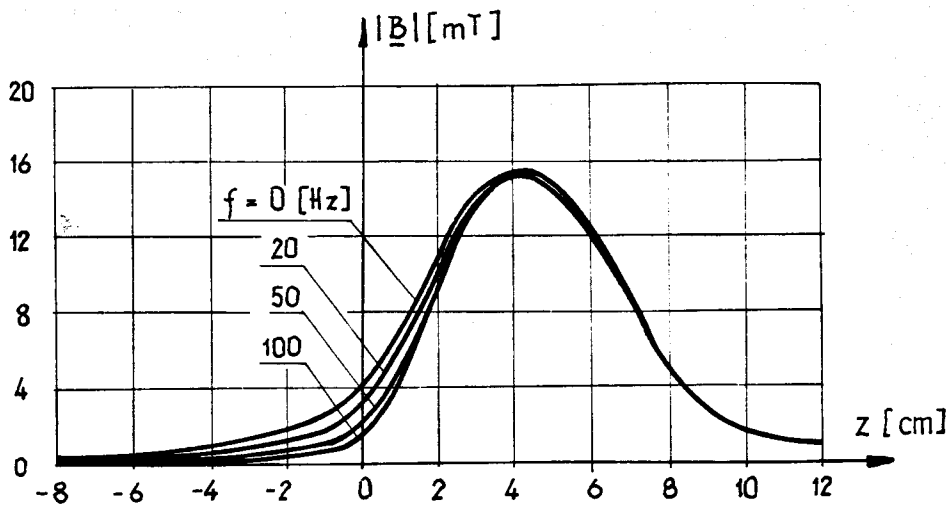


Bild 7.22. Verteilung der magnetischen Induktion auf der Symmetrieachse

7.2.5. Mittlere Zeitkonstante und Schirmfaktor

Zur Charakterisierung der Schirmwirkung wird beim stationären magnetischen Feld die dimensionslose reelle Zahl

$$S = H_i / H_a , \quad (7.18)$$

der sogenannte Schirmfaktor [44] verwendet. Er gibt an, um wieviel die magnetische Feldstärke H_i im inneren abgeschirmten Gebiet gegenüber der Feldstärke H_a bei der Abwesenheit der Abschirmung reduziert wird. Bei der quasistationären elektromagnetischen Abschirmung bildet der Schirmfaktor ebenso wie die magnetische Feldstärke einen frequenzabhängigen komplexen Wert

$$\underline{S}(j\omega) = \underline{H}_i(j\omega) / \underline{H}_a(j\omega) . \quad (7.19)$$

Man kann beweisen, daß für die in diesem Kapitel betrachteten Schirmprobleme folgende Beziehung gilt

$$\underline{H}_a(j\omega) = \underline{H}_i(j\omega = 0) ,$$

d.h. der o.g. Schirmfaktor $\underline{S}(j\omega)$ und der untersuchte Frequenzgang $\underline{E}(j\omega)$ sind äquivalent. Vom theoretischen Standpunkt bildet das im Abschnitt 7.2.3 dargestellte Problem eine Ausnahme, weil auch bei Abwesenheit des Schirms die Stromverdrängung in den beiden massiven Leitern berücksichtigt werden müßte. Die durch-

geführten, numerischen Experimente haben jedoch bewiesen, daß in der Praxis diese Stromverdrängung keinen Einfluß auf das ursprüngliche elektromagnetische Feld im Raum der Abschirmung hat. Aus diesem Grund wird im weiteren $\underline{S}(j\omega) = \underline{E}(j\omega)$ angenommen.

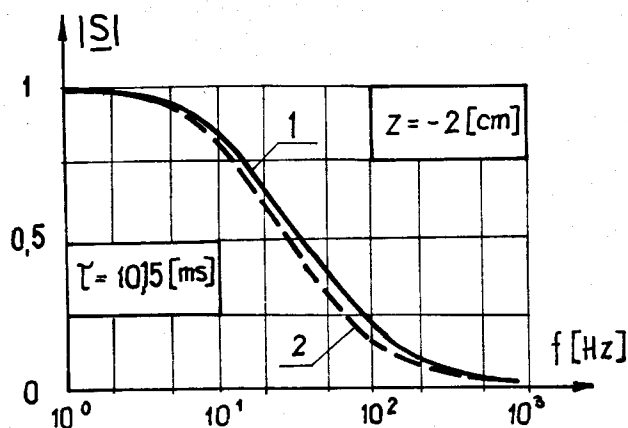


Bild 7.23. Absolutwert des Schirmfaktors der Abschirmung vom Bild 7.17:

1-aus dem Frequenzgang $\underline{E}(j\omega)$ ermittelt,
2-auf Grund der Zeitkonstante abgeschätzt

Soll $\underline{E}_a(j\omega) = 1/(1 + j\omega\tau)$ der genäherte Frequenzgang sein, wobei τ die mittlere Zeitkonstante eines nichtstationären elektromagnetischen Vorgangs in der Abschirmung bedeutet, so erhält man

$$\underline{S}(j\omega) = \underline{E}(j\omega) \approx \underline{E}_a(j\omega) = 1/(1 + j\omega\tau) . \quad (7.20)$$

Wie im Kapitel 6 gezeigt wurde, gilt die Näherung (7.20) nur im Fall relativ kleiner Kreisfrequenzen ω und kann im Allgemeinen nicht zur Analyse im breiten Frequenzbereich angewandt werden. Durch die Gl. (7.20) ist jedoch eine Beziehung zwischen dem Schirmfaktor $\underline{S}(j\omega)$ und der mittleren Zeitkonstanten bestimmt. Zum Beispiel bedeutet eine größere Zeitkonstante einen kleineren Schirmfaktor, d.h. bessere Schirmwirkung. Neben dem üblich ausgenutzten Schirmfaktor kann demnach die mittlere Zeitkonstante als einfacher Parameter zur Charakterisierung von elektromagnetischen Abschirmungen ebenfalls verwendet werden. Außerdem kann man auf Grund der mittleren Zeitkonstante und der genäherten Beziehung (7.20) den Absolutwert des Schirmfaktors (Bild 7.23) abschätzen.

7.3. Zeitkonstante des magnetischen Flusses in einem Gleichstrommagnet bei feststehendem Anker

Zur Beeinflussung des dynamischen Verhaltens von Gleichstrommagneten werden u.a. einige schaltungstechnische Maßnahmen (Einzelheiten z.B. bei *Kallenbach* [45]) verwendet. Die Beschleunigung des Übergangsprozesses kann durch den Einsatz eines Vorwiderstandes bzw. einer RC-Kombination erfolgen. Die verzögerte Wirkung des Elektromagneten wird dagegen mit Hilfe von Kurzschlußwicklungen erreicht, wobei im einfachsten Fall Kurzschlußringe ausgenutzt werden. Der Kurzschlußring wird in Form einer Buchse aus Kupfer bzw. Aluminium angefertigt und zusammen mit der stromdurchflossenen Erregerspule koaxial an einem Kern angebracht. Bei entsprechender Konstruktionslösung läßt sich der Ring verschieben, wodurch die Verzögerung im gewissen Bereich eingestellt werden kann (*Elbaum* [32]). Ein Modell des Topfmagneten mit einem verschiebbaren Kurzschlußring ist im Bild 7.24 dargestellt.

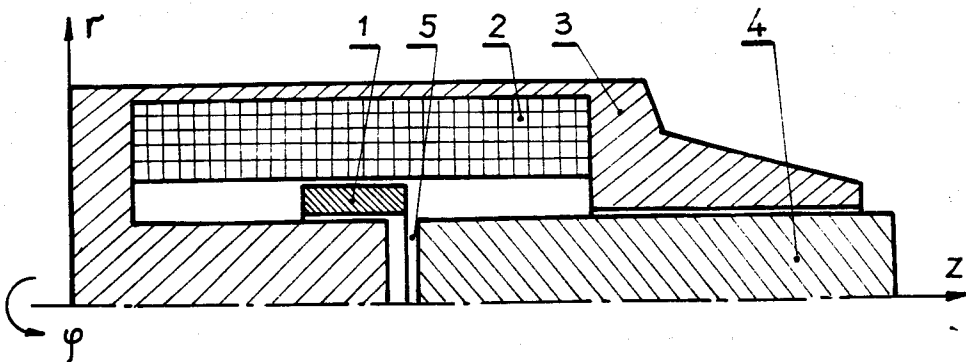


Bild 7.24. Topfmagnet mit verschiebbarem Kurzschlußring: 1 - Kurzschlußring; 2 - Erregerspule; 3 - Gehäuse; 4 - Anker; 5 - Arbeitsluftspalt

Unter dem dynamischen Verhalten des Elektromagneten versteht man das Gesamtverhalten während des Ausgleichsvorgangs, welches durch die Kopplung elektrischer, magnetischer und mechanischer Prozesse bestimmt wird. In diesem Abschnitt wird der Einfluß von Wirbelströmen auf die Dynamik des Elektromagneten untersucht.

Die im Bild 7.24 gezeigte Anordnung ist ein Beispiel eines magnetischen Kreises mit verteilter Erregung. Um den magneti-

schen Fluß Φ_a im Arbeitsluftspalt bestimmen zu können, soll zuerst das Vektorpotential \mathbf{A} gefunden werden. Das Vektorpotential hat ebenso wie die Erregerstromdichte nur eine ϕ -Komponente, die in Luft die Laplace-, in der Spule die Poisson- und in den leitenden Teilen des Elektromagneten (1,3,4) die homogene Diffusionsgleichung erfüllt.

Der magnetische Fluß ist durch die Beziehung

$$\Phi = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \tag{7.21}$$

bestimmt, d.h. in dem Arbeitsluftspalt kann der Fluß Φ_a aus folgender Abhängigkeit

$$\Phi_a = A \cdot 2\pi r \tag{7.22}$$

berechnet werden. Für axialsymmetrische Aufgaben ist es üblich, statt der Funktion A die Hilfsfunktion $U = r \cdot A$ zu berechnen. Dann ergibt sich

$$\Phi_a = 2\pi U \tag{7.23}$$

Numerische Lösung

Obwohl das vorliegende Problem räumlich offen ist, kann man wegen des Vorhandenseins eines permeablen Gehäuses außerhalb des Gleichstrommagneten eine Berandung mit der Randbedingung $A=0$ annehmen. Auf der Symmetrieachse gilt ebenfalls die homogene Randbedingung $A=0$. Das betrachtete Gebiet wurde in 923 lineare finite Elemente (498 Elementeknoten) unterteilt.

Tabelle 7.1. Stoffwerte des Gleichstrommagneten (Nr. des Gebietes siehe Bild 7.24)

Nr. des Gebietes	μ_r [--]	γ [S/m]	
1	1	$57 \cdot 10^6$	(Cu)
2	1	--	
3	500	$5 \cdot 10^6$	} (Fe)
4	500	$5 \cdot 10^6$	
5	1	0	

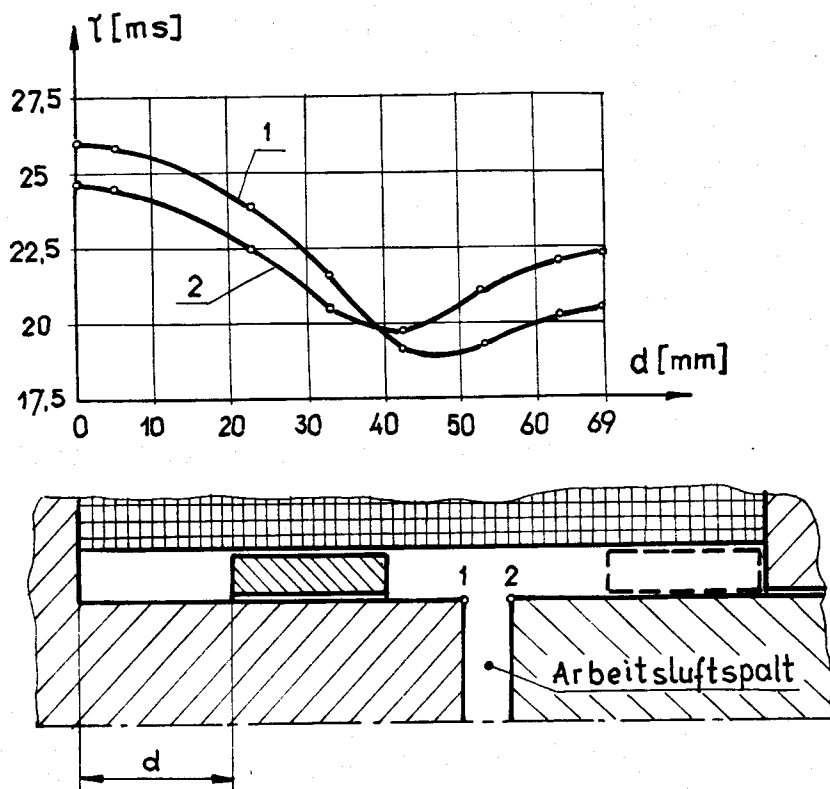


Bild 7.25. Abhängigkeit der Zeitkonstante des magnetischen Flußes im Arbeitsluftspalt (Punkt 1 und 2) von der Lage des Kurzschlußringes

Die zur Rechnung angenommenen Stoffwerte sind in Tabelle 7.1 zusammengestellt. Es wurde die magnetische Durchflutung (die Amperewindungszahl) von 2500 [A] und der Arbeitsluftspalt von 6 [mm] vorausgesetzt.

Ergebnisse der numerischen Rechnungen werden in den Bildern 7.25–7.27 präsentiert. Im Bild 7.25 ist die Abhängigkeit der mittleren Zeitkonstante des Flußverlaufes im Arbeitsluftspalt von der Verschiebung des Kurzschlußringes gezeigt. Die Nullstellung bedeutet, daß sich der Ring in der extrem linken Lage befindet. Ohne Kurzschlußring ergibt sich eine mittlere Zeitkonstante um $\tau = 8,28$ [ms] und mit demselben ist sie 2,4 bis 3 mal größer (je nach Lage des Ringes). Im Bild 7.26 ist die Verteilung der mittleren Zeitkonstante und des magnetischen Flußes im Arbeitsluftspalt und im Bild 7.27 der Verlauf der Linien $r \cdot A = \text{const}$ im Gebiet des Gleichstrommagneten dargestellt.

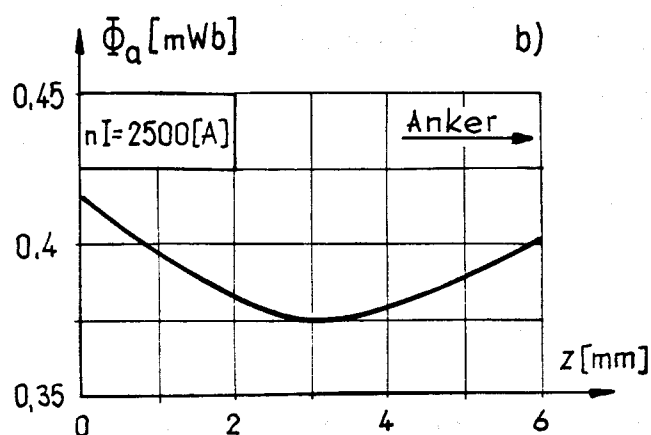
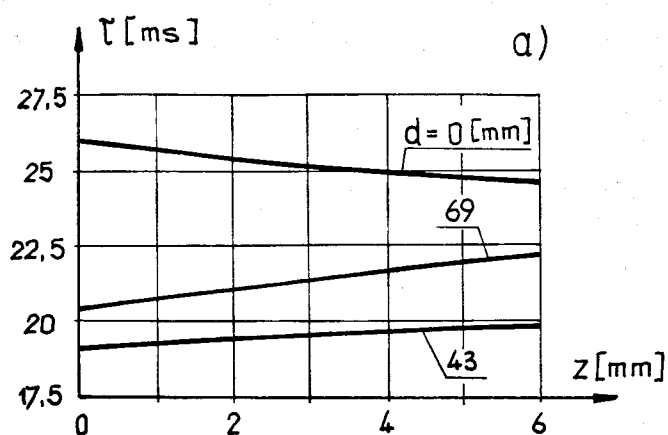


Bild 7.26. Verteilung a) der Zeitkonstante des magnetischen Flusses; b) des magnetischen Flusses im Arbeitsluftspalt mit $2r = 33,3$ [mm]

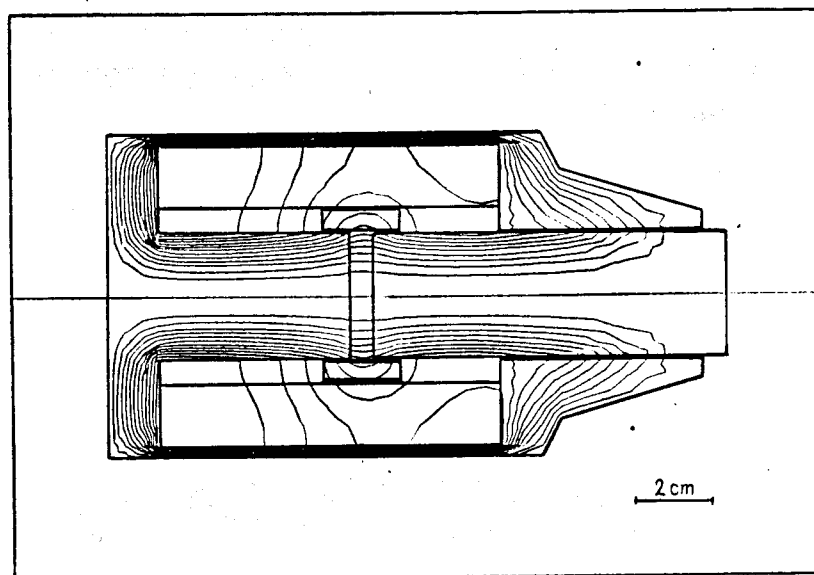


Bild 7.27. Verteilung der Linien $r \cdot A = \text{const}$ im stationären Zustand für die Durchflutung von 2500 [A]. Gezeichnet sind die Linien $r \cdot A = (0 \div 1,3) \cdot 10^{-4}$ [Wb] mit dem Zuwachs von $+0,1 \cdot 10^{-4}$ [Wb]

7.4. Das dynamische Verhalten eines aktiven elektrischen "Witterungsfühlers"

7.4.1. Allgemeines

An der TU Szczecin werden die mit der Automatisierung von Fernheizungssystemen verbundenen Arbeiten im Auftrag des Forschungs- und Entwicklungszentrums für die Fernheizung (Warschau) durchgeführt. Die Forschungen wurden am Beispiel des vom Heizkraftwerk EC II - Pomorzany gespeisten Fernwärmeversorgungssystems zuerst (1982-85) im Rahmen des Regierungsprogramms PR-8 und dann (1986-89) im Rahmen des zentralen Programms CPBR 5.1.4 realisiert. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse einiger Forschungsarbeiten (Durnas u. a. [31]) dargestellt.

Sparsames Wirtschaften mit Wärmeenergie erfordert eine ständige Anpassung der Wärmeversorgung an den tatsächlichen Bedarf der beheizten Objekte. Die Komplexautomatisierung eines großen Fernheizsystems besteht darin, daß drei (übergeordnete) Regelungsstufen verwendet werden. Die erste (niedrigste) Stufe bildet die Wärmeversorgungsregelung in beheizten Räumen durch Anwendung von direkt auf dem Heizkörper angebrachten Thermoregelungsventilen. Auf diese Weise wird die Temperatur in einzelnen Räumen des Gebäudes nach den individuellen Bedürfnissen der Bewohner eingestellt. Die richtige Wirkung des Thermoreglers ist von der Lieferung einer entsprechenden Wärmemenge abhängig. Diese Wärmemenge wird aus den Fernheizungsknoten geliefert und soll den aktuellen Wärmebedürfnissen entsprechen. Wird sie mangelhaft, so tritt unabhängig von der Wirkung der o.g. Thermoregler ein Temperaturabfall auf. Eine zu große Wärmemenge kann dagegen zur Beschädigung der Inneninstallation führen. Aus diesem Grund ist die Anwendung der zweiten Regelungsstufe erforderlich. Zur richtigen Aussteuerung der in den Fernheizungsknoten auftretenden Wärmeaustauscher werden verschiedene Regelungssysteme verwendet [85]. Eine der Lösungen basiert auf der Anwendung des EZTR-Satzes, der zur Regelung der Vorlauftemperatur in der Zentralheizungsinstallation entworfen wurde. Der EZRT-Satz wird u. a. mit folgenden Teilanlagen ausgestattet:

- elektronischer Regler R-303 bzw. R-304 (Hersteller: VEB Wetron -Weida),
 - elektrischer Klimact-Schubantrieb KTO bzw. KTI (Hersteller: KTO - Zavody Priemyslove Automatizace Ilonice; KTI - Zavody Priemyselnej Automatizacie Dulka Presov, ČSFR),
 - Temperaturfühler zur Messung der Außentemperatur, z.B. TOPO-31/M (Hersteller: MERA-KFAP Kraków, RP),
 - Temperaturfühler zur Messung der geregelten Temperatur des Wärmeträgers, z.B. TOP-E3 (Hersteller: MERA-KFAP Kraków, RP).
- Zusätzlich werden die Stellventile 20.000A (Zakłady Automatyki MERA-POLNA Przemyśl, RP) verwendet.

Die dritte Regelungsstufe befindet sich im Heizwerk, wo die Wärmeerzeugung nach den Wetterprognosen und unter Berücksichtigung von bestimmten Wettercharakteristiken geplant und realisiert wird.

Probleme, die in dem vorliegenden Abschnitt behandelt werden sind mit der zweiten Regelungsstufe verbunden. Bei der Regelung des Zentralheizungssystems wird die Messung einiger Temperaturvorgänge erforderlich. Von großem Interesse ist dabei die Messung der Lufttemperatur außerhalb des erwärmten Gebäudes. Zu diesem Zweck werden gewöhnlich die elektrischen Widerstandsthermometer, z.B. mit einem Platin-Meßwiderstand (Pt 100) benutzt. Diese Meßfühler dienen nur zur Messung der Temperatur, während die thermischen Bedingungen in den erwärmten Räumen auch von vielen anderen Faktoren, wie z.B. von der Luftfeuchtigkeit außerhalb des Gebäudes oder von der Windstärke und Sonneneinstrahlung abhängen. Um den Einfluß dieser Faktoren berücksichtigen zu können, soll statt des einfachen elektrischen Thermometers ein aktiver "Witterungsfühler" angewandt werden. Der Fühler soll auf die atmosphärischen Außenbedingungen ähnlich wie das beheizte Gebäude reagieren. Außerdem muß er weiteren Anforderungen entsprechen [31]:

- Der Fühler muß an den vorhandenen Temperaturregler angepasst werden;
- Der Fühler soll über variable dynamische Eigenschaften verfügen, was durch ein zusätzliches elektronisches System erreicht wird. Dank dieser Eigenschaften soll im Fall einer

plötzlichen Steigerung der Außenbedingungen, das verzögerte Ansprechen des Reglers bewirkt werden, wodurch das Fernheizsystem vor Belastung und gefährlicher Druckzunahme geschützt werden kann;

- Der Fühler soll schnell veränderliche und kurzfristige Schwankung der Außenbedingungen "abfiltern".

Die aktive Wirkung des Fühlers kann durch die Ausstattung des Thermometers mit einem zusätzlichen Widerstandsheizkörper erreicht werden, wobei die Wärmeleistung des elektrischen Mikroheizers durch das o.g. elektronische System geregelt wird. Die Bedingungen des Wärmeaustausches zwischen dem "Witterungsfühler" und der Umgebung sind indirekt von der Windstärke und der Feuchtigkeit abhängig. Steigt z.B. die Windgeschwindigkeit, so steigen auch die Reynoldssche (Re) und die Nusseltsche (Nu) Zahl sowie der Wärmeübertragungskoeffizient α . Nach der Änderung der Randbedingungen wird auch die durch den Platin-Meßwiderstand gemessene Temperatur vermindert. Diese Temperatur bildet demnach die Resultante aller atmosphärischen Faktoren.

Der Fühler ist mit zwei unabhängigen Temperaturfühlern ausgestattet, wobei der eine an den elektronischen Regler R-303 angeschlossen wird und der zweite für die Mitwirkung mit dem zusätzlichen elektronischen System vorgesehen ist.

Um eine richtige Mitwirkung gewährleisten zu können, soll der Fühler über bestimmte dynamische Eigenschaften verfügen. Beim Entwurf des Fühlers war die Durchführung einer Reihe von experimentellen und theoretischen Forschungsarbeiten, z.B. einer rechnergestützten Simulation erforderlich. Dank dieser Simulation wurden u.a. die dynamischen Eigenschaften des entworfenen Fühlers abgeschätzt. Das vom Verfasser bearbeitete FE-Computerprogramm wurde an den zuerst hergestellten Meßfühlern getestet. In diesem Abschnitt werden nur einige Ergebnisse der durchgeführten Untersuchungen dargestellt. Ausführliche Informationen kann man in den Auftragsberichten [31] finden.

7.4.2. Prinzipieller Aufbau des "Witterungsfühlers"

Auf Grund eines im Bericht [31] vorgeschlagenen urbildlichen "Witterungsfühlers" kann man, nach Annahme einiger Vereinfachungen, das im Bild 7.28 dargestellte Modell des Fühlers erhalten.

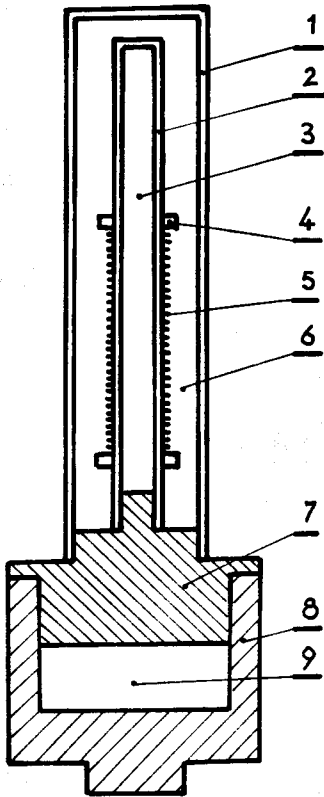


Bild 7.28. Modell des prinzipiellen Aufbaus eines "Witterungsfühlers":

- 1 - Messinggehäuse;
- 2 - Stahlgehäuse;
- 3 - Meßwiderstand ($2 \times Pt\ 100$);
- 4 - Scheibe;
- 5 - Mikroheizer;
- 6 und 9 - Luft;
- 7 - Kunststoffuntersatz;
- 8 - Umhüllung

Der Fühler besteht aus einem in einem zylindrischen Stahlgehäuse eingeschlossenen Platin-Meßwiderstand ($2 \times Pt\ 100$). Auf einem Teil des Stahlrohres wurde ein elektrischer Mikroheizer angebracht. Diese Meßanordnung befindet sich in der Mitte eines von unten mit einem Kunststoffuntersatz verschlossenen Messinggehäuses.

Die theoretische Analyse des nichtstationären Temperaturfeldes wird unter folgenden Voraussetzungen durchgeführt (ausführliche Begründung wurde in der Arbeit [31] angegeben):

- Weil die durch die Außenbedingungen verursachten Temperaturänderungen im Fühler relativ klein sind, werden die Stoffwerte als temperaturunabhängig betrachtet und die Aufgabe wird als ein lineares Randwertproblem behandelt;

- Die Wärmeübertragung in den inneren Luftspalten erfolgt nur durch Wärmeleitung. Im betrachteten Fall ist das Produkt der Grashof'schen und Prandtl'schen Zahlen in dem praktisch auftretenden Außentemperaturbereich $Gr \cdot Pr < 1000$, d.h. entsprechend den Kriterien von Jakob und Kraussold (siehe z.B. Gröber u.a. [38]) ist die Berücksichtigung der freien Konvektion in den geschlossenen Luftspalten nicht erforderlich. Es wird dabei die Wärmestrahlung in den Spalten nicht beachtet;
- Der Wärmeaustausch auf der Außenfläche des Fühlers verläuft nur auf einem konvektiven Wege. Bei dem betrachteten Temperaturbereich kann die Ausstrahlung der Wärmeenergie vernachlässigt werden. Die konduktive Wärmeübertragung folgt sowohl aus der freien als auch aus der erzwungenen Konvektion.

Das Temperaturfeld T wird mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung (2.31) beschrieben, wobei die Wärmequellendichte q_v außerhalb des elektrischen Mikroheizers gleich Null angenommen werden soll. Die Funktion T erfüllt eine bestimmte Anfangsbedingung, die im weiteren näher dargestellt wird und die Randbedingung dritter Art

$$\lambda \text{grad}_n T = \alpha(T_a - T), \quad (7.24)$$

wobei T_a die Außentemperatur ist.

7.4.3. Numerische Experimente

Zur Lösung des axialsymmetrischen Randwertproblems wurde das betrachtete Gebiet in 537 lineare finite Elemente mit 310 Elementeknoten unterteilt. Die zur Auswertung angenommenen Stoffwerte sind in der Tabelle 7.2 zusammengestellt (für Luft werden mittlere Werte vorausgesetzt). Die Länge der Anordnung wird zu 125 [mm] angenommen. Der mit Gleichstrom gespeiste Mikroheizer hat die konstante Leistung von 0,46 [W] ($q_v = 2,48 \text{ [MW/m}^3\text{]}$). Die Wärmeübertragungskoeffizienten wurden nach den Beziehungen von Michiejew (freie Konvektion) und Hilpert (erzwungene Konvektion) auf Grund der dimensionslosen Kennzahlen: Gr, Pr, Re und Nu [38] abgeschätzt. Im weiteren werden die Ergebnisse von drei numerischen Experimenten präsentiert.

Tabelle 7.2. Stoffwerte des "Witterungsfühlers"
(Nr. des Gebietes siehe Bild 7.28)

Nr. des Gebietes	ρ [kg/m ³]	c_p [J/(kg·K)]	λ [W/(m·K)]
1	8520	385	110,6
2	7860	461	40,0
3	2400	1090	1,035
4,7	1400	1507	0,337
5	8920	410	22,7
6	1,124	1005	0,028
8	2696	879	206,0
9	1,164	1005	0,027

Experiment I: Das Einschalten des elektrischen Heizers

Untersucht wird das Wärmefeld im Übergangszustand nach Einschalten des Mikroheizers. Vor dem Einschalten weist die Innentemperatur überall einen konstanten Wert $T = T_a = \text{const}$ auf,

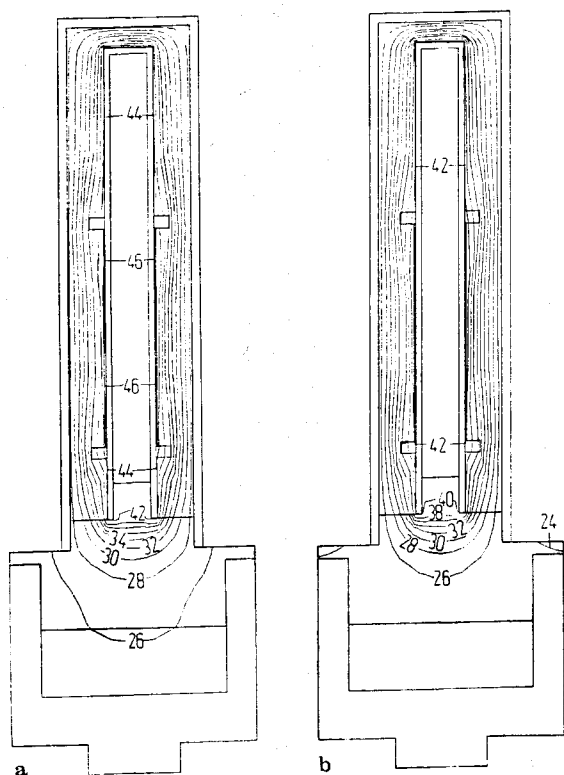


Bild 7.29. Die Temperaturverteilung ($^{\circ}\text{C}$) im Fühler nach Einschalten des Heizers für $T_a = 23,9$ $^{\circ}\text{C}$

- a) $\alpha = 15,3$ $[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$
b) $\alpha = 75,5$ $[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$

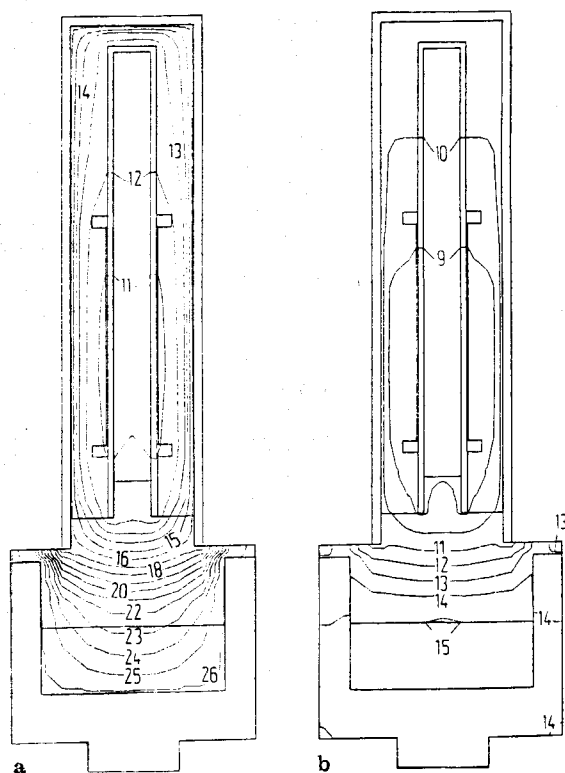


Bild 7.30. Verteilung der Zeitkonstante [Min.] (Experiment I)

- a) $\alpha = 15,3$ $[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$
b) $\alpha = 75,5$ $[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$

wobei die Außentemperatur während des Experimentes $T_a = 23,9 \text{ } [^{\circ}\text{C}]$ beträgt.

Ergebnisse der numerischen Rechnungen mit $\alpha = 15,3 \text{ } [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$ und $\alpha = 75,5 \text{ } [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$ werden in den Bildern 7.29–7.31 präsentiert. Im Bild 7.29 ist die Temperaturverteilung und im Bild 7.30 die Verteilung der Zeitkonstante (Linien $\tau = \text{const}$) im Raum des Fühlers dargestellt. Nach der Bestimmung der Zeitkonstante kann der Fühler näherungsweise als Übertragungselement 1. Ordnung betrachtet werden. Für $\alpha = 15,3 \text{ } [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$ erhält man die Zeitkonstante, deren Mittelwert im Raum des Platin-Widerstandes $\tau = 692 \text{ } [\text{s}]$ ist. Die Sprungantwort, die dieser Zeitkonstante entspricht, wird mit den Meßergebnissen verglichen und im Bild 7.31 gezeigt.

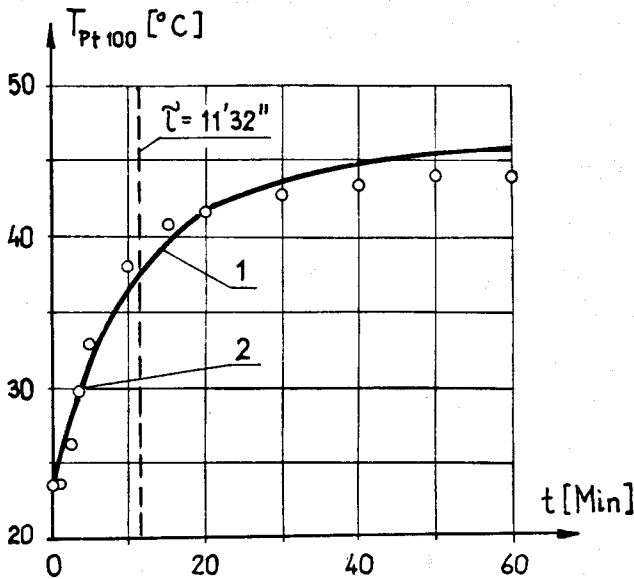


Bild 7.31. Nichtstationärer Temperaturverlauf (Experiment I):
 1 – numerisch berechnet
 2 – experimentell ermittelt

Experiment II: Die Außentemperaturschwankung

Bei eingeschaltetem Mikroheizer wird eine sprunghafte Änderung der Außentemperatur angenommen. Vor dem Experiment wird der stationäre Zustand (Anfangszustand) durch die Leistung des Heizers, den Wärmeübertragungskoeffizient α und die Lufttemperatur außerhalb des Fühlers $T_a = 23,9 \text{ } [^{\circ}\text{C}]$ bestimmt. Nach der Außentemperaturschwankung ($T_a = 1,3 \text{ } [^{\circ}\text{C}]$) ist die Diffusion des Wärmefeldes zu beobachten. Die Verteilung der Linien $\tau = \text{const}$ für $\alpha = 15,3 \text{ } [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$ und $\alpha = 75,5 \text{ } [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$ ist im Bild 7.32 dargestellt.

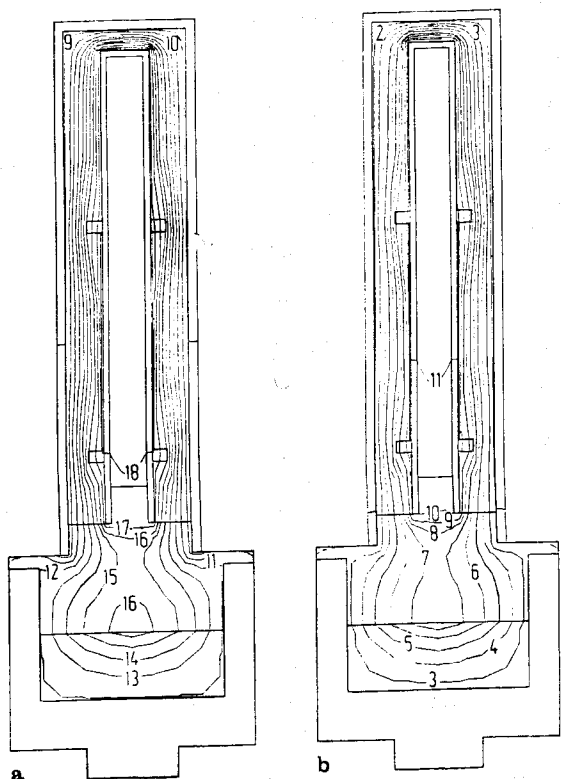


Bild 7.32. Verteilung der Zeitkonstante [Min.] (Experiment II)

- a) $\alpha = 15,3 \text{ [W/(m}^2 \cdot \text{K)]}$
 b) $\alpha = 75,5 \text{ [W/(m}^2 \cdot \text{K)]}$

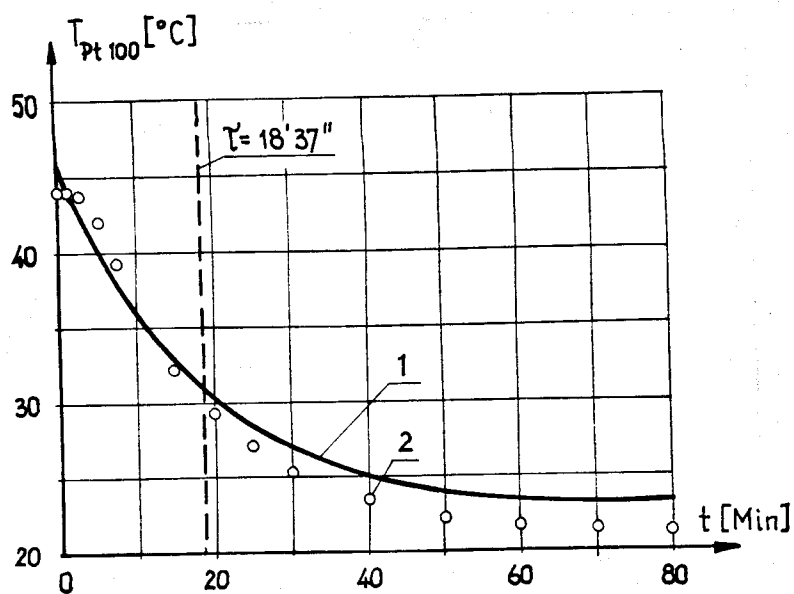


Bild 7.33. Nichtstationärer Temperaturverlauf (Experiment II)

- 1 - numerisch berechnet
 2 - experimentell ermittelt

Im Gebiet des Platinwiderstandes erhält man für $\alpha = 15,3$ $[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$ den Mittelwert der Zeitkonstante von $\tau = 1117$ [s]. Im Bild 7.33 sind die Sprungantwort des den Fühler approximierenden Übertragungselementes mit Verzögerung 1. Ordnung und die Meßergebnisse dargestellt.

Für das vorliegende Experiment wurden zusätzlich die im Kapitel 6 eingeführten Momente G_k ausgewertet. Von besonderem Interesse sind die Mittelwerte von G_k im Gebiet des Meßwiderstandes (3). Zum Beispiel mit Annahme von $\alpha = 15,3$ $[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$ wurde bestimmt:

$$G_1 = 1,1174 \cdot 10^9 \text{ [s] ,}$$

$$G_2 = 2,0276 \cdot 10^6 \text{ [s}^2\text{] .}$$

Daraus folgen die in der Tabelle 7.3 angegebenen Parameter von Übertragungsfunktionen. Für das 3. Modell (Proportionalglied mit Verzögerung m-ter Ordnung) ist der Parameter m eine nicht ganze Zahl. Die Übertragungsfunktion, die diesem Modell entspricht, wird im Anhang B (Gl.(B3)) angegeben.

Tabelle 7.3 Die Parameter von approximierenden Übertragungsfunktionen $K_a(s)$

$K_a(s)$	Parameter
$\frac{1}{1 + s\tau}$	$\tau = 18'37''$
$\frac{\exp(-s\tau_o)}{1 + s\tau}$	$\tau_o = 3'54''$ $\tau = 14'43''$
$\frac{1}{(1 + s\tau)^m}$	$m = 1,6028$ $\tau = 11'37''$

Experiment III: Sprunghafte Änderung der Wärmeaustauschbedingungen

Die Änderung der Windgeschwindigkeit hat einen direkten Einfluß auf die Änderung der Wärmeaustauschbedingungen. Es wird in diesem Experiment die sprunghafte Änderung des Koeffizienten α vorausgesetzt und ein Ausgleichsprozess untersucht. Die Außen-

temperatur ist konstant $T_a = 20 [^{\circ}\text{C}]$, während der Wärmeübertragungskoeffizient sprunghaft steigt von $20 [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$ auf $80 [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$. Die Verteilung der Zeitkonstante des nichtstationären Temperaturfeldes ist für dieses Beispiel im Bild 7.34 dargestellt. Der Mittelwert der Zeitkonstante im Raum des Meßwiderstandes ist $\tau = 648 [\text{s}]$.

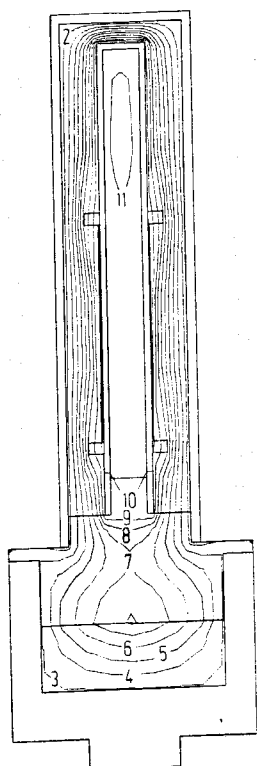


Bild 7.34. Verteilung der Zeitkonstante [Min.] (Experiment III)

* * *

Die in den Bildern 7.30, 7.32 und 7.34 dargestellte Verteilung der mittleren Zeitkonstante im Fühler hat eine physikalische Interpretation. Die kleinsten Werte der Zeitkonstante (d.h. die kleinste Dauer des Ausgleichs) treten erwartungsgemäß in der Nähe der Störungsquellen auf, wobei die Zunahme der Zeitkonstante die Richtung der Diffusion zeigt. Beim Einschalten des Mikroheizers (Experiment I, Bild 7.30) steigt die Zeitkonstante von der Mitte der Anordnung (Wärmequelle) nach außen. Bei den Experimenten II (Bild 7.32) und III (Bild 7.34) wurde der Ausgleich durch die Änderung der Randbedingungen verursacht. Weil in diesen Fällen das Eindringen der Störung in den Fühler auftritt, nimmt die mittlere Zeitkonstante den kleinsten Wert auf der Außenfläche an und steigt im Inneren des Fühlers.

* * *

Die in diesem Abschnitt dargestellten Ergebnisse der numerischen Feldanalyse haben aufgrund des vereinfachten Modells einen gewissen Fehler gegenüber den Meßwerten. Die ausführliche Fehleranalyse hat der Verfasser im Bericht [31] durchgeführt. Der Fehler wurde einerseits durch die angenommenen Vereinfachungen (u.a. Nichtberücksichtigung der Nichtlinearität und der Wärmestrahlung) und andererseits durch nicht genaue Stoffwerte und Koeffizienten verursacht. Ein ähnliches Problem wurde auch von *Brockmann* [6] behandelt. Die Arbeit [6] wurde der nichtstationären eindimensionalen Analyse der Übergangsfunktion von Berührungsthermometern mittels des Differenzenverfahrens gewidmet. Es wurde u.a. der Einfluß von Stoffwerten, sowie des Koeffizienten α auf die Ergebnisse der numerischen Lösung diskutiert.

8. ZUSAMMENFASSENDE WERTUNG UND VORSCHLÄGE ZUR FORTFÜHRUNG DER ARBEIT

Ziel der vorliegenden Arbeit ist - neben der Darstellung der aktuellen Situation auf dem Gebiet der rechnergestützten Analyse von Diffusionsprozessen - die Erarbeitung und praktische Anwendung von neuen Methoden zur Untersuchung und Charakterisierung nichtstationärer Felder.

Die Arbeit besteht aus acht Kapitel. Das Kapitel 1 enthält einführende Aussagen zum aktuellen Stand und zu den Entwicklungstendenzen auf dem Gebiet der numerischen Analyse von Diffusionsprozessen. Es wurde auch der Gegenstand sowie die zu lösenden Aufgaben der Arbeit dargestellt. Im Kapitel 2 wurden die Differentialgleichungen formuliert, welche nichtstationäre Felder in der Elektrotechnik beschreiben und im Kapitel 3 einige Methoden zur Charakterisierung dynamischer Prozesse besprochen. Das Kapitel 4 wurde einigen, meist verwandten Verfahren zur Behandlung von durch parabolische Differentialgleichungen beschriebenen Anfangs-Randwertaufgaben gewidmet. Außerdem wurde der Lösungsweg bei räumlich offenen Feldaufgaben dargestellt. Der Inhalt des Kapitels 5 verbindet sich mit den im Abschnitt 1.3 gestellten Aufgaben 1 und 4. Auf Grund der Literatur wurden kurz die bisherigen Methoden zur Bestimmung der mittleren Zeitkonstante von Diffusionsvorgängen besprochen und neue, vom Verfasser bearbeitete, numerische Algorithmen vorgeschlagen. Die Algorithmen bestehen darin, daß keine Anfangs-Randwertaufgabe sondern nur eine Randwertaufgabe gelöst werden muß, wobei als Hilfsmittel eine der Methoden zur Bestimmung der Raumlösung (z.B. die Finite-Differenzen- bzw. Finite-Element-Methode) angewandt wird. Die dargestellten Algorithmen wurden anhand einiger Berechnungsbeispiele erläutert. Das Kapitel 6 verbindet sich dagegen mit den im Abschnitt 1.3 formulierten Aufgaben 2 und 4. Erarbeitet wurden zwei Varianten numerischer Algorithmen, welche mit Verwendung der modifizierten Momentenmethode und einer der Lösungsmethoden zur Behandlung von Randwertproblemen die Berechnung einiger Kenngrößen, wie: Verzögerung, Totzeit u.a. gestatten. Die erste Variante besteht in der numerischen Be-

stimmung des Anfangs- und Endzustandes, sowie der rekursiven Auswertung der modifizierten Momente. Bei der zweiten Variante soll durch die Lösung der komplexen Helmholtz-Differentialgleichung der Frequenzgang für sehr kleine Frequenzen gefunden und interpoliert werden. Mit Hilfe der gewonnenen Koeffizienten des Interpolationspolynomes kann man die modifizierten Momente und schließlich auch die o.g. Kenngrößen ermitteln. Die beiden numerischen Verfahren wurden an Beispielen diskutiert. Im Kapitel 7 wurden mittels der in den Kapitel 5 und 6 vorgeschlagenen Methoden einige praktische Probleme behandelt:

- Das dynamische Verhalten räumlich begrenzter und räumlich offener Magnetfelder in einiger Anordnungen zur elektromagnetischen Abschirmung;
- Die Zeitkonstante des magnetischen Flusses in einem Gleichstrommagnet bei feststehendem Anker;
- Das dynamische Verhalten eines aktiven, elektrischen "Witterungsfühlers",

wobei in einigen Fällen die umfassende Analyse im Zeit- und Frequenzbereich durchgeführt wurde.

In den in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagenen Algorithmen wurden als Hilfsmittel analytisch-numerische und hauptsächlich "rein" numerische Verfahren zur Behandlung von Randwertaufgaben angewandt. Deswegen sind diese Algorithmen durch alle Vor- und Nachteile der numerischen Rechentechnik gekennzeichnet. Der Vorteil numerischer Methoden besteht darin, daß die Struktur des Gebietes beliebig kompliziert sein darf und ebenso die Randbedingungen sowie die Verteilung der Felderregung berücksichtigt werden kann. Zu den Nachteilen kann man zählen, daß die Lösung des Problems nur diskret zu gewinnen ist. Um die Analyse der diskreten Ergebnisse zu erleichtern, werden sie durch einen Postprozessor verarbeitet und dann z.B. in einer graphischen oder approximierenden analytischen Form dargestellt.

Als wichtiger Vorteil der bearbeiteten Algorithmen soll genannt werden, daß bei der numerischen Feldanalyse keine Anfangs-Randwertaufgabe, sondern nur einige Randwertaufgaben gelöst werden müssen. Diese Handlungsweise gestattet u.a., den Rechenaufwand wesentlich zu reduzieren und Instabilitätsprobleme zu

vermeiden. Das nach diesen Algorithmen geschriebene Computerprogramm zeichnet sich durch optimale und sparsame Speicherplatzverwaltung aus, wobei die schon vorhandene Software zur Behandlung stationärer Feldprobleme einfach adaptiert werden kann. Bei der Analyse nichtstationärer Wirbelstromprobleme kann ebenfalls die vorhandene Software zur Berechnung stationärer Wechselfelder direkt ausgenutzt werden. Man muß jedoch mit einem größeren Speicherplatzbedarf und einer längeren Rechenzeit rechnen.

Die praktische Verwendbarkeit der erarbeiteten Algorithmen zur Analyse der Ausgleichsvorgänge wurde in der Arbeit anhand zahlreichen Beispiele bewiesen. Bestätigt wurde sowohl die Konvergenz der numerischen Lösung als auch die recht gute Rechengenauigkeit. Es hat sich ebenfalls die praktische Bedeutung der Frequenzanalyse zur Charakterisierung des dynamischen Verhaltens in Anordnungen mit verteilten Parametern bewährt. Auf ihrer Grundlage kann man erfolgreich das nichtstationäre elektromagnetische Feld auch im Zeitbereich untersuchen. Die Beispiele haben auch die neuen Möglichkeiten der praktischen Ausnutzung der numerisch ermittelten mittleren Zeitkonstante gezeigt. Die mittlere Zeitkonstante wurde bisher nur als der die Dauer eines aperiodischen Ausgleichsvorgangs bestimmende Zeitparameter betrachtet. Wie anhand der analysierten Feldaufgaben gezeigt wurde, kann sie ebenfalls zu weiteren physikalisch-technischen Aussagen herangezogen werden. Zum Beispiel veranschaulicht ihre graphisch dargestellte räumliche Verteilung die Richtung und die Geschwindigkeit der Feldausbreitung im untersuchten Gebiet. Man kann dabei die für das diffundierende Feld durchlässigen und undurchlässigen inneren Gebiete erkennen. Sie könnte auch, neben dem üblicherweise benutzten Schirmfaktor, als einfacher Parameter zur Charakterisierung von elektromagnetischen Abschirmungen in einem ω -Bereich angegeben werden.

Der wesentliche Nachteil der in der vorliegenden Arbeit ausgenutzten Lösungsmethoden besteht darin, daß sie prinzipiell nur für lineare Probleme geeignet sind. Im ersten Algorithmus kann man die Rechenergebnisse durch die nichtlineare Behandlung des Anfangs- und Endzustandes korrigieren und bei der Berechnung der modifizierten Momente mittlere Stoffwerte annehmen.

Dieser Kunstgriff wird vermutlich nur im Fall einer "schwachen" Nichtlinearität wirken, deshalb bildet die wirkungsvolle Berücksichtigung von nichtlinearen Materialeigenschaften eine der zu lösenden wichtigen Aufgaben.

Bei der Analyse des elektromagnetischen Feldes wurde in dieser Arbeit die Voraussetzung der Quasistationarität (langsam veränderliche Felder) angenommen. Die mittels der modifizierten Momentenmethode gewonnenen approximierenden Übertragungsfunktionen gelten ebenfalls nur im Bereich niedriger Frequenzen. Aus diesem Grund scheint es zweckmäßig zu sein, die Forschungen auf rasch veränderlichen Prozesse unter Berücksichtigung höherer Frequenzen der Felderregung zu erweitern.

Die angegebenen Methoden gelten auch für dreidimensionale Feldprobleme. Leider hatte der Verfasser keine entsprechend große EDV-Anlage zur Verfügung, um ein geeignetes 3D-Beispiel durchzurechnen. Diesem Thema sollen die zukünftigen Forschungen gewidmet werden.

Die oben angegebenen Vorschläge zur Fortführung der Arbeit haben einen allgemeinen Charakter und betreffen die Weiterentwicklung von dargestellten Rechenmethoden. Weitere Vorschläge, die sich mit der Untersuchung dynamischer Prozesse in der Elektrotechnik verbinden, werden auf die Lösung bestimmter praktischer Aufgaben gerichtet. Zu den interessanten praktischen Aufgaben der technischen Elektrodynamik gehören nach Ansicht des Verfassers folgende Probleme:

- Numerische Identifikation der Erregung und die Empfindlichkeitsanalyse in räumlichen Wirbelstromanordnungen;
- Aufgaben der Synthese nichtstationärer Felder, z.B. Synthese der Erregung bei vorgegebenen (vorausgesetzten) zeitlichen Ausgangsverhalten.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Allen, B.; Ida, N.; Lord, W.: Finite element modeling of pulse eddy current NDT phenomena. COMPUMAG'85, Fort Collins, Colorado, USA. IEEE Transactions on Magnetics 21 (1985)6, S. 2250-2253.
- [2] Avramescu, A.: Eindringzeit des elektromagnetischen Feldes und des Wärmefeldes im Leiter. ETZ-A 91(1970)4, S. 235-238.
- [3] Axellson, O.: On some experiments with time discretisations COMPUMAG'78, Grenoble, France, paper 7.1.
- [4] Bouillaut, F.; Razeq, A.: Eddy current due to stator teeth in synchronous rotors. INTERMAG'84, Hamburg, Germany. IEEE Transactions on Magnetics 20(1984)5, S. 1931-1941.
- [5] Brebbia, C.A.; Telles, J.C.F.; Wrobel, L.C.: Boundary element techniques. Theory and application in engineering. Springer-Verlag, Berlin 1984.
- [6] Brokmann, T.: Ein numerisches Berechnungsverfahren der Übergangsfunktion von Berührungsthermometern bei konvektiver Wärmeübertragung. Dissertation (A), Technische Hochschule Ilmenau, Ilmenau 1976.
- [7] Brykalski, A.: Mittlere Zeitkonstante von Diffusionsvorgängen in einer unendlichen Platte, einem Zylinder und einer Kugel (poln.). Rozprawy Elektrotechniczne 30(1984)4, S. 1025-1035.
- [8] Brykalski, A.: Berechnungsmethode der mittleren Zeitkonstante bei Diffusionsprozessen (poln.). Rozprawy Elektrotechniczne 31(1985)2, S. 305-315.
- [9] Brykalski, A.: Ein Beitrag zur Bestimmung der mittleren Zeitkonstante von Diffusionsprozessen. Int. J. Heat Mass Transfer 28(1985)3, S. 613-620.
- [10] Brykalski, A.: Über die Eindringzeit des elektromagnetischen Feldes im Leiter. Archiv für Elektrotechnik 68(1985)4 S. 299-304.
- [11] Brykalski, A.: Zeitkonstante des Skineffektes in einer axialsymmetrischen elektromagnetischen Abschirmung. Rev. Roum. Sci. Techn. - Electrotechn. et Energ. 31(1986)1, S. 101-106.
- [12] Brykalski, A.: Über numerische Bestimmung der Dauer von nichtstationären Zuständen der mittels einer Leitungsgleichung beschriebenen Zuständen (poln.). Rozprawy Elektrotechniczne 32(1986)2, S. 3-11.
- [13] Brykalski, A.: Anwendung der FE-Methode zur Bestimmung der Dauer der aperiodischen Störungen in den drei- und zweidimensionalen Systemen mit Verteilten Parametern (poln.). Rozprawy Elektrotechniczne 33(1987)2, S. 297-307.

- [14] *Brykalski, A.*: Untersuchung der Dynamik von elektromagnetischen und Wärmeprozessen in elektrischen Anlagen mittels der Methoden der numerischen Feldanalyse (poln.). *Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej - Monografie*, Nr 343, Szczecin 1987.
- [15] *Brykalski, A.*: Determination of average time constant for diffusion processes by means of finite element method. *Communications in Applied Numerical Methods* 3(1987)4, S. 265-269.
- [16] *Brykalski, A.*: Numerische Untersuchungen der dynamischen Eigenschaften des aktiven elektrischen "Witterungsfühlers". *Archiv für Elektrotechnik* 70(1987)5, S. 327-332.
- [17] *Brykalski, A.*: Analyse der Dauer eines nichtstationären Wärmefeldes mit Hilfe eines Differenzenverfahrens. *Wärme- u. Stoffübertragung* 21(1987)6, S. 323-327.
- [18] *Brykalski, A.*: Bestimmung der Parameter der Ersatzübertragungsfunktionen von Objekten mit verteilter Verzögerung (poln.). *Rozprawy Elektrotechniczne* 34(1988)2, S. 339-356.
- [19] *Brykalski, A.*; *Durnas, M.*; *Purczyński, J.*: Anwendung eines aktiven Inertialfühlers im System der automatischen Regelung in Fernheizungsknoten. *Tage der Wissenschaft und Technik '88*, TH Wismar, 6-9.9.1988, Vortrag B6, Tagungsmaterialien, S. 25.
- [20] *Brykalski, A.*; *Krasoń, P.*: A direct variational method for the equivalent time constant of diffusion processes. *Int. J. Heat Mass Transfer* 26(1983)3, S. 445-449.
- [21] *Brykalski, A.*; *Lipiński, W.*; *Purczyński, J.*: Anwendung der Variationsmethode von Ritz zur Bestimmung der mittleren Zeitkonstante von Diffusionsvorgängen. *Archiv für Elektrotechnik* 66(1983)1, S. 13-18.
- [22] *Brykalski, A.*; *Lipiński, W.*: Elektromagnetische Transmission von bandbegrenzten Signalen durch eine leitende Abschirmung (poln.). *Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej*, Nr 407 (1990), S. 15-23
- [23] *Brykalski, A.*; *Purczyński, J.*; *Lipiński, W.*: Über die Zeitkonstante der Wirbelströme in einer rechteckförmigen Abschirmung. *Rozprawy Elektrotechniczne* 39(1984)1, S. 53-60.
- [24] *Burias, N.*; *Foggia, A.*; *Nicolas, A.*; *Pascal, J.P.*; *Sabonnadiere, J.C.*: Numerical solution of eddy current problems including moving conducting parts. *INTERMAG'84*, Hamburg, Germany. *IEEE Transactions on Magnetics* 20(1984)5, S. 1995-1997.
- [25] *Butler, A.J.*; *Cendes, Z.J.*: Space-time finite element derived by convolution for the efficient solution of transient eddy current problems. *INTERMAG'88*, Vancouver, Canada. *IEEE Transactions on Magnetics* 24(1988)6, S. 2688-2690.
- [26] *Collard, D.*; *Decarpigny, J.N.*: Two-dimensional process simulation using a quadratic finite element discretization. *COMPEL* 3(1984)1, S. 17-33.

- [27] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin 1951.
- [28] Davey, K.R.: On the use of the eigenvalue approach in the prediction of transient eddy current fields. COMPUMAG'87, Graz, Austria. IEEE Transactions on Magnetics 24(1988)1, S. 190-192.
- [29] Davey, K.R.: Shell impedance conductors for steady state and transient eddy current problems. Third Binneal Conference on Electromagnetic Field Computation 1988, Washington D.C., USA. IEEE Transactions on Magnetics 25(1989)4, S. 3007-3009.
- [30] Douglas Jr., J.; Dupont, T.: Galerkin methods for parabolic equations. SIAM J. Numer. Anal. 7(1970)4, S. 575-626.
- [31] Durnas, M.; Purczyński, J.; Brykalski, A.; Matusiak, J.: Trägheitswandler zur Umwandlung von meteorologischen Parametern für die Zentralheizungsregler (poln.). Durchgeführt an der TU Szczecin im Auftrag der OBRC in Warschau im Rahmen CPBR 5.1.4., Ziel 4.9. Forschungsberichte, Szczecin 1986-89.
- [32] Elbaum, J.: Industrieelektromagnete (poln.). WNT, Warszawa 1964.
- [33] Emson, C.R.; Trowbridge, C.W.: Transient 3D eddy current using modified magnetic vector potentials and magnetic scalar potentials. COMPUMAG'87, Graz, Austria. IEEE Transactions on Magnetics 24(1988)1, S. 86-89.
- [34] Garg, V.K.; Weiss, J.; Del Vecchio, R.M.; Raymond, J.: Magneto-thermal coupled finite element method calculations in multiconductor systems. INTERMAG'87, Tokyo, Japan. IEEE Transactions on Magnetics 23(1987)5, S. 3296-3298.
- [35] Gitt, W.; Schon, K.: Numerische Verfahren zur Entfaltung des Duhamel-Integrals im Hinblick auf die Berechnung des zeitlichen Verlaufs von Hochspannungsimpulsen. Archiv für Elektrotechnik 63(1981)5, S. 317-325.
- [36] Górecki, H.: Analyse und Synthese der totzeitbehafteten Regelsysteme (poln.). WNT, Warszawa 1971.
- [37] Gramz, M.; Ziółkowski, M.: SONMAP v.2.0. Softwaresystem zur numerischen Feldanalyse (poln.). Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej - Monografie, Nr 358, Szczecin 1988.
- [38] Gröber, H.; Erk, S.; Grigull, U.: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.
- [39] Hannala, A.Y.; MacDonald, D.C.: Numerical analysis of transient field problems in electrical machines. Proc. IEE 123 (1976)9, S. 893-898.
- [40] Hara, T.; Naito, T.; Umoto, J.: Time-periodic finite element method for nonlinear diffusion equation. COMPUMAG'85, Fort Collins, Colorado, USA. IEEE Transactions on Magnetics 21(1985)6, S. 2261-2264.

- [41] Hofmann, D.: Dynamische Temperaturmessung. VEB Verlag Technik, Berlin 1976.
- [42] Honma, T.; Tanaka, Y.: Transient solution of two-dimensional convective diffusion equation using regular boundary element method. INTERMAG'87, Tokyo, Japan. IEEE Transactions on Magnetics 23(1987)5, S. 3293-3295.
- [43] Hortopan, C.; Hortopan, V.: Eine allgemeine Theorie der Messwiderstände im Übergangszustand. ETZ-A (1971)8, S. 470-474.
- [44] Kaden, H.: Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959.
- [45] Kallenbach, E.: Der Gleichstrommagnet. Akademische Verlagsgesellschaft Geest&Portig, Leipzig 1969.
- [46] Kirtley Jr., J.L.; Furuyama, M.: A design concept for large superconducting alternators. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems 94(1975)4, S. 1264-1269.
- [47] Коган, М.Г.: Решение нелинейных задач теории теплопроводности методом Канторовича. ИФЖ 12(1967)1, с. 72-78.
- [48] Kohlgrüber, K.; Woelk, G.: Instationäre Temperaturfeldberechnung in Körpern mit kleinen Abmessungen. Elektrowärme International 43(1985)4, S. 183-189.
- [49] Krajewski, B.: Ein direktes Variationsverfahren zur Behandlung der Wärmeübertragungsprobleme für erzwungene Konvektion. Int. J. Heat Mass Transfer 16(1973)2, S. 469-483.
- [50] Krason, P.: An analysis of electromagnetic fields in ferromagnetic materials. Archiv für Elektrotechnik 67(1984)1, S. 5-8.
- [51] Krawczyk, A.: Anwendung der FE-Methode bei nichtstationären Problemen der technischen Elektrodynamik (poln.). Rozprawy Elektrotechniczne 29(1983)2, S. 331-344.
- [52] Lancaster, P.: Theory of matrices. Academic Press, New York 1969.
- [53] Legros, W.; Nicolet, A.; Paganini, M.: Numerical modelization of transient eddy current in relay. 1989 International Magnetics Conference, Washington D.C., USA. IEEE Transactions on Magnetics 25(1989)5, S. 3593-3595.
- [54] Leonard, P.J.; Rodger, D.: Finite element schema for transient 3D eddy current. COMPUMAG'87, Graz, Austria. IEEE Transactions on Magnetics 24(1988)1, S. 90-93.
- [55] Liniger, W.: Optimization of a numerical integration method for stiff systems of ordinary differential equations. IBM Research Report, RC 2198, 1968.
- [56] Lipiński, W.: Analyse der Dynamik des elektromagnetischen Feldes in leitenden Medien (poln.). Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej - Monografie, Nr 63, Szczecin 1976.

- [57] *Lipiński, W.*: Bestimmung der induzierten Stromdichteverteilung in einer zylindersymmetrischen elektromagnetischen Abschirmung. Archiv für Elektrotechnik 65(1982), S. 203-207.
- [58] *Lipiński, W.*: Ein Beitrag zur Theorie der Schirmung von Magnetfeldern in zweidimensionalen unbegrenzten Räumen. Archiwum Elektrotechniki 35(1986)2, S. 599-603.
- [59] *Lipiński, W.*: Über die Abschirmung stationärer und nichtstationärer Magnetfelder von Zylinderspulen. Archiv für Elektrotechnik 58(1976)1, S. 9-14.
- [60] *Lipiński, W.*; *Gołębiowski, J.*: Modeling of elektromagnetic shield dynamic. IEEE Transactions on Magnetics 16(1980)6, S. 1419-1422.
- [61] *Loretan, P.A.*: Laplace - variational method to transient multi-dimensional temperature distribution. Nucl. Engng Design 11(1969)1, S. 27-40.
- [62] *Łach, J.*: Nichtstationäres Temperaturfeld bei nichtlinearer Randbedingung (poln.). Archiwum Budowy Maszyn 20(1973)3, S. 503-519.
- [63] *Massé, Ph.*; *Morel, B.*; *Breville, Th.*: A finite element prediction correction schema for magneto-thermal coupled problem during Curie-transition. INTERMAG'85, St. Paul, Minnesota, USA. IEEE Transactions on Magnetics 21(1985)5, S. 1871-1873.
- [64] *Matsuoka, F.*; *Kameari, A.*: Calculation of three dimensional eddy current by FEM-BEM coupling method. COMPUMAG'87, Graz, Austria. IEEE Transactions on Magnetics 24(1988)1, S. 183-185.
- [65] *Miller, T.J.E.*; *Hughes, A.*: comparative design and performance analysis of air-cored and iron-cored synchronous machines. Proc. IEE 124(1977)2, S. 127-132.
- [66] *Miyoshi, T.*; *Suima, M.*; *Omori, H.*: Analysis of an induction heating system by the finite element method combined with boundary integral equation. IEEE Transactions on Magnetics 23(1987)2, S. 1827-1832.
- [67] *Mocanu, C.I.*: Über die Zeitkonstante des Skineffektes. ETZ-A 92(1971), S. 156-161.
- [68] *Mocanu, C.I.*: Die Ersatzschaltungen mit konstanten Parametern des kreisförmigen, zylindrischen Leiters unter Berücksichtigung des Übergangsskineffektes bei zugeführtem Strom. ETZ-A 93(1972)2, S. 72-76.
- [69] *Mocanu, C.I.*: Nichtstationäre Stromverdrängung in einer Maschinennut von rechteckigem Querschnitt. Archiv für Elektrotechnik 55(1973)3, S. 164-170.
- [70] *Müller, R.*: Vergleich von ein- und zweidimensionaler Analyse des Übergangsverhaltens verteilter exponentieller Schichtstrukturen. Wiss. Zeitschr. der TH Ilmenau 23(1977)5 S. 71-79.

- [71] Müller, R.: Erfahrungen mit dem Verfahren der alternierenden Richtungen für inhomogen berandete Feldgebiete am Beispiel exponentieller verteilter RC-Strukturen. 26. Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau 1981, Vortragsreihe "Theoretische Elektrotechnik", S. 179-182.
- [72] Petczewski, W.: Steuerungstheorie (poln.). WNT, Warszawa 1980.
- [73] Philippow, E.: Grundlagen der Elektrotechnik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest&Portig, Leipzig 1976.
- [74] Pissanetzky, S.: A simple infinite element. COMPEL 3(1984)2 S.107-114.
- [75] Preis, K.: Ein Beitrag zur Berechnung ebener Wirbelstromverteilungen. Archiv für Elektrotechnik 65(1982)5, S. 309 - 314.
- [76] Purczyński, J.: Angenäherte Modelle der mittels der parabolischen Gleichungen beschriebenen Systeme (poln.). Rozprawy Elektrotechniczne 32(1986)4, S. 1055-1068.
- [77] Purczyński, J.; Brykalski, A.: Anwendung der Kantorowitsch-Methode zur Lösung der Leitungsgleichung (poln.). Rozprawy Elektrotechniczne 28(1982)3/4, S.385-400.
- [78] Purczyński, J.; Brykalski, A.: Anwendung des modifizierten Momentenverfahrens zur Bestimmung der approximierenden Übertragungselemente (poln.). Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej, Nr 407 (1990), S. 81-95
- [79] Renyuan, T.; Hong, G.; Lianfa, G.: The calculation of transient field and parameters of REPM synchronous generator. COMPUMAG'85, Fort Collins, Colorado, USA. IEEE Transactions on Magnetics 21(1985)5, S. 2336-2339.
- [80] Rolicz, P.: Anwendung von direkten Methoden der Funktionalanalyse zur Analyse nichtstationärer, elektromagnetischer Prozesse in elektrischen Maschinen und Anlagen (poln.). Rozprawy Nr 85, Politechnika Poznańska, Poznań 1977.
- [81] Salon, S.J.: The hybrid finite element - boundary element method in electromagnetics. INTERMAG'85, St. Paul, Minnesota, USA. IEEE Transactions on Magnetics 21(1985)5, S. 1829-1834.
- [82] Salon, S.J.; D'Angelo, J.: Application of the hybrid finite element - boundary element method in electromagnetics. COMPUMAG'87, Graz, Austria. IEEE Transactions on Magnetics 24(1988)1, S. 80-87.
- [83] Savkar, S.D.: On a variational formulation of a class of thermal entrance problems. Int. J. Heat Mass Transfer 13 (1970)7, S. 1187-1197.
- [84] Schwarz, H.R.: Methode der finiten Elemente. B.G. Treubner, Stuttgart 1984.
- [85] Schlott, S.: Temperaturregelung von Wasserheizungsanlagen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1985.

- [86] Shao, K.R.; Zhou, K.D.: Transient response in slot-embedded conductor for voltage source solved by boundary element method. COMPUMAG'85, Fort Collins, Colorado, USA. IEEE Transactions on Magnetics 21(1985)6, S. 2257-2260.
- [87] Shao, K.R.; Chen, X.; Zhou, K.D.: Transient solution of the diffusion equation by boundary element method (B.E.M.). INTERMAG'84, Hamburg, Germany. IEEE Transactions on Magnetics 20(1984)5, S. 1998-2000.
- [88] Sikora, R.; Lipiński, W.: Zur Zeitkonstante bei der Wärmeausbreitung und ähnlichen diffusionsartigen Ausgleichsvorgängen in ausgedehnten Körpern. msr 19(1976)1, S. 32-34.
- [89] Simonyi, K.: Theoretische Elektrotechnik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1977.
- [90] Skoczowski, S.: Einige Bemerkungen zur Approximation von Regelstrecken mit Ausgleich. Regelungstechnik 31(1983)7, S. 231-234.
- [91] Tandon, S.C.; Amor, A.F.; Chari, M.V.K.: Nonlinear transient finite element field computation for electrical machines and devices. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems 102(1983)5, S. 1089-1096.
- [92] Töpfer, H.; Rudert, S.: Einführung in die Automatisierungstechnik. VEB Verlag Technik, Berlin 1984.
- [93] Tortschanoff, T.: Survey of numerical methods in field calculations. INTERMAG'84, Hamburg, Germany. IEEE Transactions on Magnetics 20(1984)5, S. 1912-1917.
- [94] Tsuboi, H.; Tanaka, M.; Misaki, T.: Computation accuracies of boundary element method and finite element method in transient eddy current analysis. INTERMAG'88, Vancouver, Canada. IEEE Transactions on Magnetics 24(1988)6, S. 3174-3176.
- [95] Weili, Y.; Qingxin, Y.; Zhigang, L.; Zushu, Q.; Mingwu, F.: Finite element analysis for static and dynamic characteristics of electromagnets. COMPUMAG'87, Graz, Austria. IEEE Transactions on Magnetics 24(1988)1, S. 190-192.
- [96] Wiak, S.: Analysis of electromagnetic field transient processes in nonlinear ferromagnetic medium. Rozprawy Elektrotechniczne 32(1986)1, S. 115-149.
- [97] Zhi-ming, S.; De-xin, X.; Cheng-qian, H.: The finite element solution of transient axialsymmetrical nonlinear eddy current field problems. COMPUMAG'85, Fort Collins, Colorado USA. IEEE Transactions on Magnetics 21(1985)6, S. 2303-2306.
- [98] Zienkiewicz, O.: The finite element method. Third edition. McGraw Hill Co., London 1979.
- [99] Zlamal, M.: Finite element methods in heat conduction problems. The mathematics of finite elements and applications II. Academic Press, New York 1976.

ANHANG A: Differentiation von Matrizen

Definition

Die k -te Ableitung der Matrix $[A(s)] = [a_{ij}(s)]$ gegenüber der Variable s ist die Matrix $[B(s)] = d^k[A(s)]/ds^k$, deren Elemente wie folgt berechnet werden

$$[B(s)] = [b_{ij}(s)] = \left[\frac{d^k}{ds^k} a_{ij}(s) \right] = \frac{d^k[A(s)]}{ds^k} . \quad (A1)$$

Für die Matrizen $[A(s)]$ und $[B(s)]$ gelten folgende allgemeine Beziehungen:

$$\frac{d}{ds} [A(s)] + [B(s)] = \frac{d[A(s)]}{ds} + \frac{d[B(s)]}{ds} , \quad (A2)$$

$$\frac{d}{ds} [A(s)] \cdot [B(s)] = \frac{d[A(s)]}{ds} \cdot [B(s)] + [A(s)] \cdot \frac{d[B(s)]}{ds} . \quad (A3)$$

Wenn $[A(s)]$ eine quadratische Matrix und n eine ganze positive Zahl ist, so ergibt sich [52]:

$$\frac{d[A(s)]^n}{ds} = \sum_{l=1}^n [A(s)]^{l-1} \cdot \frac{d[A(s)]}{ds} \cdot [A(s)]^{n-l} , \quad (A4)$$

$$\frac{d[A(s)]^{-n}}{ds} = -[A(s)]^{-n} \cdot \frac{d[A(s)]^n}{ds} \cdot [A(s)]^{-n} . \quad (A5)$$

ANHANG B: Übergangsfunktionen

Die angegebenen Übergangsfunktionen entsprechen den Übertragungsfunktionen aus der Tabelle 6.1:

$$h_1(t) = 1(t) \cdot [1 - \exp(-t/\tau)] , \quad (B1)$$

$$h_2(t) = 1(t - \tau_0) \cdot \{1 - \exp[(\tau_0 - t)/\tau]\} . \quad (B2)$$

Für eine positive Zahl m gilt:

$$h_3(t) = \frac{1(t)}{\Gamma(m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+m)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{k+m} , \quad (B3)$$

wobei $\Gamma(\dots)$ die Euler-Funktion bedeutet. Falls m eine natürliche Zahl ist, ergibt sich:

$$h_3(t) = 1(t) \left[1 - \exp(-t/\tau) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{\tau} \right)^k \right] . \quad (B4)$$

Danksagung

Frau Prof.Dr.sc.techn. Renate Müller möchte ich an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit, die Betreuung und Förderung während ihres Entstehens danken.

Lebenslauf

Andrzej Brykalski

geboren am 6.04.1956 in Szczecin,
als Sohn des Jerzy Brykalski und seiner Ehefrau
Maria Brykalska geb. Szczepaniak,
seit 1983 verheiratet mit Teresa Brykalska geb.
Pankiewicz, ein Kind (7 Jahre)

- 1963-1971 Besuch der Grundschule in Szczecin
- 1971-1974 Besuch des Adam-Asnyk-Gymnasium in Szczecin,
mathematisch-naturwissenschaftlicher Zweig,
Reifeprüfung am 8.06.1974
- 1974-1979 Studium der Elektrotechnik,
Fachrichtung Theoretische Elektrotechnik und Au-
tomatisierungstechnik, an der Technischen Univer-
sität Szczecin,
Abschluß der Diplom-Hauptprüfung am 11.06.1979
- 1977, 1978 Fachpraktikum bei den Vereinigten Elektrizitäts-
werken Westfalen AG, Bezirksdirektion Bochum
- 1978, 1979 Fachpraktikum bei der Aktiengesellschaft für Ver-
sorgungs-Unternehmen zu Gevelsberg
- 1980 Wehrdienst
- seit 1979 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für
Elektronik und Informatik der Technischen Univer-
sität Szczecin, z.Zt. Leiter der Arbeitsgruppe
für Grundlagen der Informatik
- 30.06.1983 Promotion zum Dr.-Ing.
- 1983-1984 Forschungsaufenthalt im Institut für Mathemati-
sche Maschinen in Warschau
- 1988, 1989 Forschungsaufenthalt im Wojewodschaftsbetrieb für
Wärmeenergetik
- seit 1989 Fernaspirantur (B) an der Hochschule für Ver-
kehrswesen Dresden, z.Zt. an der Technischen
Hochschule Ilmenau mit einem Stipendium des pol-
nischen Ministeriums für Nationale Ausbildung

ERKLÄRUNG

Ich erkläre,

daß ich die vorliegende Arbeit (entsprechend der genannten Verantwortlichkeit) selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe

A. Brykalski

(Andrzej Brykalski)

Ilmenau, den 25. September 1990

**UNTERSUCHUNG DES VERHALTENS VON NICHTSTATIONÄREN
ELEKTROMAGNETISCHEN UND THERMISCHEN FELDERN
MIT NUMERISCHEN VERFAHREN**

Thesen

zur Dissertation (B)

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor scientiae technicarum

(Dr.sc.techn.)

vorgelegt

dem Wissenschaftlichen Rat der Technischen Hochschule Ilmenau

von

Dr.-Ing. Andrzej Brykalski

Ilmenau, den 26. September 1990

1. Die numerische Feldberechnung als Instrument zur Entwicklung und Optimierung elektrischer Anlagen und Geräte spielt in den Aufgaben des rechnergestützten Entwurfs eine immer größere Rolle. Im besonderen gewinnt bei vielen Problemen der Elektrotechnik die Analyse dynamischer Prozesse, z.B. des nichtstationären elektromagnetischen oder Wärmefeldes an Bedeutung. Als Beispiele können folgende Probleme genannt werden: die Bestimmung der Wirbelstromprozesse in elektrischen Maschinen, u.a. der nichtstationären Stromverdrängung in den Nuten; die Untersuchung des Abschirmverhaltens; die Erwärmungsprozesse bei induktiver oder Widerstandserwärmung; das dynamische Verhalten der Wirbelströme in Systemen zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung u.v.a..
2. Die nichtstationären Prozesse werden im Zeit- und Frequenzbereich untersucht sowie mit Hilfe der mittleren Zeitkonstante charakterisiert. In den meisten wissenschaftlichen Veröffentlichungen wurde die numerische Analyse des dynamischen Verhaltens im Zeitbereich durchgeführt, wobei die zu lösende Anfangs-Randwertaufgabe am häufigsten mit Hilfe der Methode der finiten Elemente für den Raumanteil der Lösung und schrittweise mit Hilfe der θ -Methode, z.B. der impliziten Methode von Euler bzw. des Crank-Nicolson-Differenzenschemas für den zeitlichen Lösungsanteil behandelt wurde. Weitaus wenige Arbeiten wurden der numerischen Feldanalyse im Frequenzbereich gewidmet. Dem Verfasser sind auch keine Veröffentlichungen zu numerischen Verfahren zur Bestimmung der mittleren Zeitkonstante von Diffusionsprozessen bekannt geworden. Aus diesem Grund scheint es zweckmäßig zu sein, die Anwendungsmöglichkeit dieser beiden Methoden auf praktische Berechnungen nachzuprüfen und neue Algorithmen zu erarbeiten.
3. Diffusionsprozesse werden mit Hilfe partieller Differentialgleichungen parabolischer Art sowie der zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen beschrieben. Entsprechend dem zu lösenden Problem kann die Diffusionsgleichung sowohl skalar als auch vektoriell sein. In den Aufgaben der Elektrotechnik wird diese Differentialgleichung meistens für die elek-

trische oder magnetische Feldstärke, das elektrische bzw. magnetische Vektorpotential sowie für die Temperatur formuliert.

4. Die Anwendung eines Gebietsdiskretisierungsverfahrens, z.B. des Differenzen- bzw. FE-Verfahrens, auf die Diffusionsgleichung führt zur Lösung einer Anfangswertaufgabe für das Differentialgleichungssystem

$$[H]\{\dot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + \{F\} = 0, \quad \{u(t=0)\} = \{u\}_0, \quad (1)$$

wobei der Vektor $\{u\}$ die jeweilig betrachtete nichtstationäre Feldgröße in den Netz- bzw. Elementeknoten ist. Zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens im Zeitbereich muß die Aufgabe (1) schrittweise gelöst werden. Um das dynamische Verhalten im Frequenzbereich analysieren zu können, muß eine komplexe Helmholtz-Differentialgleichung betrachtet werden. Die numerische Behandlung dieser Gleichung führt zu dem komplexen algebraischen Gleichungssystem

$$([H] + j\omega[C])\{\underline{u}\} + \{F\} = 0, \quad (2)$$

welches für verschiedene Kreisfrequenzen, theoretisch von $\omega = 0$ bis zur Gültigkeitsgrenze der quasistationären Feldbetrachtung, gelöst wird.

5. Zur Bestimmung der Dauer eines aperiodischen Ausgleichsvorgangs $U(P,t)$ in dem Raumpunkt P wird die mittlere Zeitkonstante

$$\tau(P) = \int_0^{\infty} [U(P,t) - U(P,\infty)] dt / [U(P,0) - U(P,\infty)] \quad (3)$$

verwandt. In den linearen Medien ist diese Zeitkonstante vom Zeitverlauf der Erregung unabhängig. Sie hängt dagegen von der räumlichen Anordnung des Materials und den jeweiligen Anfangs- und Randbedingungen ab. Wie in der Arbeit bewiesen wurde, muß zu ihrer Berechnung keine Anfangs-Randwertaufgabe, sondern eine Randwertaufgabe gelöst werden. Die vom Verfasser erarbeitete Methode zur numerischen Berechnung der mittleren Zeitkonstante besteht darin, daß der stationäre (End-) Zustand

$$\{u\}_{\infty} = -[H]^{-1} \{F\} \quad (4)$$

und der Hilfsvektor

$$\{v\} = [H]^{-1} [C] (\{u\}_0 - \{u\}_\infty) \quad (5)$$

gefunden werden müssen. Die mittlere Zeitkonstante in jedem i-ten Knoten läßt sich dann aus der Beziehung

$$\tau_i = v_i / (u_{i0} - u_{i\infty}) \quad (6)$$

bestimmen.

6. Die mittlere Zeitkonstante τ kann als die Verzögerungszeit eines vereinfachten approximierenden Modells - des ortsabhängigen Übertragungselementes mit Verzögerung 1. Ordnung: $K(P,s) = K_0(P) / [1 + s\tau(P)]$ betrachtet werden. Die in der Literatur angegebene modifizierte Momentenmethode gestattet, nach der Berechnung folgender Integrale

$$G_k(P) = k \cdot \int_0^\infty [U(P,t) - U(P,\infty)] t^{k-1} dt / [U(P,0) - U(P,\infty)], \quad (7)$$

($k=1, 2, \dots, N$)

die ortsabhängigen Parameter (z.B. die Zeitkonstanten, die Totzeit oder die Ordnung der Verzögerung) von Übertragungsfunktionen komplizierterer approximierender Modelle zu bestimmen. Wie in der Arbeit bewiesen wurde, sind die Momente $G_k(P_i)$ in jedem i-ten Knoten durch die Beziehung

$$G_k(P_i) = v_i^{(k)} / (u_{i0} - u_{i\infty}) \quad (8)$$

bestimmt, wobei $v_i^{(k)}$ - die Elemente der Spaltenvektoren

$$\begin{aligned} \{v^{(1)}\} &= [H]^{-1} [C] (\{u\}_0 - \{u\}_\infty), \\ \{v^{(k)}\} &= k \cdot [H]^{-1} [C] \{v^{(k-1)}\}, \quad k=2, \dots, N \end{aligned} \quad (9)$$

sind. Die Vektoren $\{v^{(k)}\}$ werden durch eine rekursive Lösung der Gleichungssysteme mit gemeinsamer Hauptmatrix berechnet, wobei N die Zahl der gesuchten Parameter in der Übertragungsfunktion bedeutet.

7. Laut der oben angegebenen Beziehungen (4,5) und (9) müssen bei der numerischen Berechnung der Momente G_k , im besonderen der mittleren Zeitkonstante, Gleichungssysteme mit gemeinsamer Hauptmatrix $[H]$ gelöst werden. Weil das erste System (siehe Gl.(4)) zur Bestimmung des stationären Zustandes führt, kann man die vorhandene Software zur Behandlung sta-

tionärar Randwertaufgaben ausnutzen. Die nächsten Gleichungssysteme (Gln (5) und (9)), welche die Berechnung der Hilfsvektoren $\{v\}$ bzw. $\{v^{(k)}\}$ gestatten, unterscheiden sich nur durch die Gestalt der rechten Seite. Um ihre Lösung zu bekommen, ist nur eine geringe Modifikation des Programms erforderlich.

Das nach den angegebenen Algorithmen geschriebene Computerprogramm zeichnet sich durch eine optimale und sparsame Speicherplatzverwaltung aus, weil die Matrizen $[H]$ und $[C]$ wechselweise berechnet und im gemeinsamen Speichergebiet abgespeichert werden können. Bei der Methode der finiten Elemente wird zur Lösung des Gesamtgleichungssystems oft die Gaussche Elimination verwandt. Da nach der Lösung des Gleichungssystems die umgewandelte Matrix $[H]$ nicht mehr gebraucht wird, kann der von ihr bisher eingenommene Speicherplatz für die Berechnung der Matrixkoeffizienten von $[C]$ ausgenutzt werden. Nach der Auswertung von $[C](\{u\}_0 - \{u\}_\infty)$ bzw. $k[C]\{v^{(k-1)}\}$ kann man diesen Speicherplatz wieder für die Gestaltung der neuen Matrix $[H]$ benutzen.

8. Die modifizierten Momente G_k , im besonderen die mittlere Zeitkonstante, können auch durch Lösung der entsprechenden Helmholtz-Gleichung für niedrige Kreisfrequenzen gefunden werden. $P(\omega)$ und $Q(\omega)$ seien der Real- und Imaginärteil des Frequenzganges, wobei

$$P(\omega) = P(0) (1 + p_2 \omega^2 + p_4 \omega^4 + \dots), \quad (10)$$

und

$$Q(\omega) = P(0) (q_1 \omega + q_3 \omega^3 + q_5 \omega^5 + \dots). \quad (11)$$

Damit ergibt sich

$$G_k = (-1)^n k! \begin{cases} q_k, & \text{für } k = 2n-1 \\ p_k, & \text{für } k = 2n \end{cases} \quad n=1,2,\dots \quad (12)$$

Die Koeffizienten p_k und q_k werden aus dem aus Gl. (2) gewonnenen Frequenzgang, z.B. mit Hilfe der Interpolation, ermittelt. Durch lineare Interpolation kann man u.a. die mittlere Zeitkonstante bestimmen, wobei das Gleichungssystem (2) zweimal (für $\omega_0 = 0$ und die hinreichend kleine Kreisfrequenz ω_1) gelöst werden muß.

Daraus folgt

$$q_1 = \frac{Q(\omega_1)}{\omega_1 P(0)} \quad \text{und} \quad \tau = -q_1. \quad (13)$$

9. Das in These 8 vorgeschlagene Berechnungsverfahren hat zwei wichtige Vorteile:

- Man kann die schon vorhandene und für stationäre Wirbelstromprobleme besonders gut entwickelte Software direkt ausnutzen;
- Weil die numerischen Rechnungen für sehr kleine Frequenzen durchgeführt werden müssen, treten keine mit der Eindringtiefe verbundenen Probleme der Raumdiskretisierung auf.

Im Unterschied zu den in den Thesen 5 und 6 skizzierten Verfahren, ist hier die Lösung des komplexen Gleichungssystems (2) erforderlich. Man muß demnach mit einem größeren Speicherplatzbedarf und einer längeren Rechenzeit rechnen.

10. Die in der Arbeit vorgeschlagenen numerischen Algorithmen kann man zur Analyse linearer diffusionsartiger Prozesse, z.B. des quasistationären elektromagnetischen Feldes anwenden. Man kann mit ihrer Hilfe auch Probleme der nichtstationären Wärmeleitung behandeln, sofern die Voraussetzung der Linearität zutrifft. Die modifizierten Momente gestatten, approximierende ortsabhängige Übertragungs- und Übergangsfunktionen zu ermitteln. Man kann den Zeitverlauf, z.B. die Sprungantwort, näherungsweise bestimmen. Bei den Berechnungen werden statt der Anfangs-Randwertaufgabe nur Randwertaufgaben (Anfangs- und Endzustand) gelöst. Diese Handlungsweise gestattet u.a., den Rechenaufwand wesentlich zu reduzieren. Die Untersuchung des dynamischen Verhaltens im Frequenzbereich läßt sich mit Hilfe von Näherungs-Übertragungsfunktionen nur in einem verhältnismäßig schmalen Bereich niedriger Frequenzen durchführen.

11. Die erarbeiteten numerischen Algorithmen wurden an einigen Berechnungsbeispielen getestet und zur Lösung praktischer Aufgaben der technischen Elektrodynamik und der nichtstationären Wärmeleitung angewandt. Untersucht wurden u.a. folgende Probleme:

- Das dynamische Verhalten räumlich begrenzter und räumlich offener Magnetfelder in einigen Anordnungen zur elektromagnetischen Abschirmung;
- Die Zeitkonstante des magnetischen Flusses in einem Gleichstrommagnet bei feststehendem Anker;
- Das dynamische Verhalten eines aktiven, elektrischen "Witterungsfühlers".

Zur Lösung der o.g. Aufgaben wurde hauptsächlich die Methode der finiten Elemente angewandt, wobei räumlich offene Feldgebiete mit infiniten Elementen modelliert wurden.

12. Anhand der betrachteten Beispiele wurde die Rechengenauigkeit diskutiert und die Konvergenz der numerischen Lösung gezeigt. Die an einigen Problemen durchgeführte umfassende Analyse elektromagnetischer Prozesse (die Untersuchung des dynamischen Verhaltens im Zeit- und Frequenzbereich sowie die Auswertung der mittleren Zeitkonstante) hat eine gute Übereinstimmung der mit Hilfe verschiedener Verfahren gewonnenen Ergebnisse nachgewiesen. Die Verwendbarkeit der angewandten Methoden wurde ebenfalls durch Meßexperimente bestätigt. Gegenüber den Meßwerten wurden die numerisch ermittelten Temperaturvorgänge in einem "Witterungsfühler" mit einer üblichen technischen Genauigkeit berechnet.

13. In dieser und den folgenden Thesen sollen Erkenntnisse, die aus den analysierten Feldproblemen hervorgingen, dargestellt werden.

Die nach einer e-Funktion verlaufenden Diffusionsvorgänge lassen sich durch die Angabe einiger modifizierten Momente G_k , im besonderen der mittleren Zeitkonstante $\tau = G_1$, charakterisieren. Auf Grund der gewonnenen Momente kann man einige Kenngrößen (z.B. die Zeitkonstanten, die Ordnung der Verzögerung) der ortsabhängigen Übertragungsfunktionen ermitteln.

14. Um die Näherungs-Übertragungsfunktion bestimmter Art gewinnen zu können, müssen durch die Momente G_1, G_2, \dots gewisse Bedingungen erfüllt werden. Diese Bedingungen zeugen von der "Approximationsfähigkeit" des Modells im betrachteten Ge-

biet. Eine gute "Approximationsfähigkeit" bedeutet, daß bei Verwendung dieser Modell-Übertragungsfunktion das nichtstationäre Feld im ganzen Gebiet beschrieben werden kann. Die beste "Approximationsfähigkeit" besitzt das Übertragungselement mit Verzögerung m -ter Ordnung:

$$K(P,s) = K_0(P) / [1 + s\tau(P)]^{m(P)}, \quad (14)$$

wobei $m(P)$ bei Systemen mit verteilten Parameter im allgemeinen eine nicht ganze Zahl ist.

15. Die mittlere Zeitkonstante wurde bisher nur analytisch berechnet und nur als der die Dauer eines Diffusionsvorgangs bestimmende Zeitparameter betrachtet. Wie anhand der analysierten Feldaufgaben gezeigt wurde, kann sie ebenfalls zu weiteren physikalisch-technischen Aussagen herangezogen werden. Zum Beispiel veranschaulicht ihre graphisch dargestellte räumliche Verteilung die Richtung und die Geschwindigkeit der Felddausbreitung im untersuchten Gebiet. Man kann dabei die für das durchdringende Feld durchlässigen und undurchlässigen inneren Gebiete erkennen. Sie könnte auch, neben dem üblicherweise benutzten Schirmfaktor, als einfacher Parameter zur Charakterisierung von elektromagnetischen Abschirmungen in einem ω -Bereich angegeben werden.
16. Die durchgeführten Berechnungen haben die praktische Bedeutung der Frequenzanalyse zur Charakterisierung dynamischer Prozesse bestätigt. Auf Grund des Frequenzganges kann man erfolgreich das nichtstationäre Feld auch im Zeitbereich untersuchen sowie einige Zeitparameter, z.B. die mittlere Zeitkonstante, bestimmen. Um die Analyse des Frequenzganges vollständig realisieren zu können, muß die Helmholtz-Differentialgleichung im breiten Frequenzbereich gelöst werden. Bei der Behandlung von Wirbelstromaufgaben ist jedoch bei hohen Frequenzen eine gebietsweise feine Ortsdiskretisierung der leitenden Bereiche erforderlich, damit die Maschenweite bzw. das finite Element klein gegenüber der Eindringtiefe bleibt.

17. Der Beitrag des Verfassers zur numerischen Untersuchung von Diffusionsprozessen liegt vor allem in der:

- Bearbeitung einer Reihe von neuen Algorithmen zur Bestimmung der mittleren Zeitkonstante und der anderen die dynamische Eigenschaften charakterisierenden Parameter;
- Einführung dieser Algorithmen zur rechnergestützten Analyse nichtstationären Feldaufgaben der Elektrotechnik;
- Darstellung neuer Möglichkeiten praktischer Ausnutzung der mittleren Zeitkonstante.

18. Die in dieser Arbeit gemachten Vorschläge zur Fortführung der Untersuchungen dynamischer Prozesse beziehen sich vor allem auf folgende allgemeine Aufgaben:

- Die wirkungsvolle Berücksichtigung von nichtlinearen Materialeigenschaften;
- Erweiterung der erarbeiteten Verfahren auf die rasch veränderliche Felder unter Berücksichtigung höherer Frequenzen der Felderregung;
- Durchführung einer dreidimensionalen Analyse dynamischer Prozesse.

Zu den praktischen Aufgaben der technischen Elektrodynamik, die sich mit der nichtstationären Analyse des elektromagnetischen Feldes verbinden und als interessant nach Ansicht des Verfassers in den zukünftigen Forschungen betrachtet werden könnten, gehören:

- Numerische Identifikation der Erregung und die Empfindlichkeitsanalyse in räumlichen Wirbelstromanordnungen;
- Aufgaben der Synthese nichtstationärer Felder, z.B. Synthese der Erregung bei vorgegebenen (vorausgesetzten) zeitlichen Ausgangsverhalten.